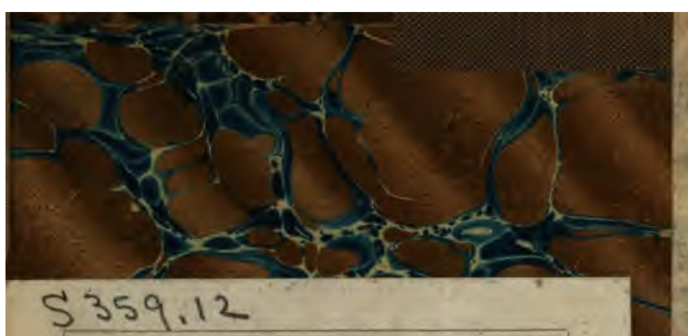



SIGILLUM ACADEMIAE HARVARDIANAE IN NOV·ANG·
CHRISTO ET ECCLESIAE
VE RI TAS


ALPHONSE
PICARD & FILS
EDITEURS
RUE BONAPARTE
82
PARIS VI ARROND

Nouvelle Collection scientifique
Directeur : Émile Borel

Science et Philosophie

PAR

Jules TANNERY

AVEC UNE NOTICE

PAR

Émile BOREL
Professeur à la Sorbonne,
Sous-directeur de l'École Normale supérieure.



LIBRAIRIE FÉLIX ALCAN

Science et Philosophie

NOUVELLE COLLECTION SCIENTIFIQUE

Directeur : ÉMILE BOREL

Volumes in-16 à 3 fr. 50 l'un.

De la Méthode dans les Sciences. *Première Série.* Par MM. P.-F. Thomas, prof. de philosophie au lycée Hoche. Emile Picard, de l'Institut. J. Tannery, de l'Institut. P. Painlevé, de l'Institut. Bouasse, prof. à la Faculté des Sciences de Toulouse, Job, prof. au Conservatoire des Arts et Métiers. A. Giard, de l'Institut. F. Le Dantec, chargé de cours à la Sorbonne, Pierre Delbet, prof. à la Faculté de Médecine de Paris. Th. Ribot, de l'Institut. Durkheim, prof. à la Sorbonne. Lévy-Bruhl, prof. à la Sorbonne. G. Monod, de l'Institut. 2e édit. 1 vol. in-16 . . . . . 3 fr. 50

De la Methode dans les Sciences. *Deuxième Série.* Par MM. Emile Borel, sous-directeur de l'Ecole normale supérieure, prof. à la Sorbonne. B. Baillaud, de l'Institut, directeur de l'Observatoire de Paris. Jean Perrin, prof. à la Sorbonne. Léon Bertrand, prof. adjoint à la Sorbonne. R. Zeiller, de l'Institut, prof. à l'Ecole des Mines. L. Blaringhem, chargé de cours à la Sorbonne. Salomon Reinach, de l'Institut. G. Lanson, prof. à la Sorbonne. A. Meillet, prof. au Collège de France. Lucien March, directeur de la Statistique générale de la France, 1 volume in-16 . . . . 3 fr. 50

Éléments de philosophie biologique, par F. Le Dantec, chargé du cours de biologie générale à la Sorbonne. 2e éd., 1 vol. in-16 3 fr. 50

La Voix. *Sa culture physiologique. Théorie nouvelle de la phonation*, par le Dr P. Bonnier, laryngologiste de la clinique médicale de l'Hôtel-Dieu, 3e édition. 1 vol. in-16 illustré . . . . . 3 fr. 50

L'Éducation dans la Famille. *Les Péchés des parents*, par P.-F. Thomas, professeur au lycée de Versailles. 3e édit. 1 volume in-16 (*couronné par l'Institut*) . . . . 3 fr. 50

La Crise du Transformisme, par F. Le Dantec. 2e édit. 1 volume in-16 . . . . 3 fr. 50

L'Énergie, par W. Ostwald, professeur honoraire à l'Université de Leipzig. Traduit de l'allemand par *E. Philippi*, licencié ès sciences, 3e édition. 1 volume in-16. . . . . 3 fr. 50

Les États physiques de la Matière, par Ch. Maurain, professeur à la Faculté des Sciences de Caen. 2e édition. 1 volume in-16 illustré . . . . 3 fr. 50

La Chimie de la Matière vivante, par Jacques Duclaux, préparateur à l'Institut Pasteur. 2e édition. 1 volume in-16. . 3 fr. 50

L'Aviation, par Paul Painlevé, de l'Institut et Emile Borel, 1 vol. in-16 avec 52 gravures. 4e édition, revue et augmentée. 3 fr. 50

La Race slave, *Statistique, démographie, anthropologie*, par Lubor Niederle, professeur à l'Univ. de Prague. Traduit du tchèque et précédé d'une préface par L. Léger, de l'Institut. 1 vol. in-16 3 fr. 50

L'Évolution des théories géologiques, par Stanislas Meunier, professeur de géologie au Muséum d'histoire naturelle. 1 vol. in-16, avec gravures . . . . 3 fr. 50

L'Artillerie de campagne ; *son Histoire, son Evolution, son Etat actuel*, par E. Buat, chef d'escadron au 25e régiment d'artillerie de campagne. 1 vol. in-16, avec 75 gravures. 3 fr. 50

Le Transformisme et l'expérience, par Et. Rabaud, maître de conférences à la Sorbonne. 1 vol. in-16, avec 12 grav. 3 fr. 50

L'Evolution de l'Electrochimie, par W. Ostwald, professeur honoraire à l'Université de Leipzig. Traduit de l'allemand par E. Philippi, licencié ès sciences. 1 vol. in-16. . . . . 3 fr. 50

Envoi franco contre mandat-poste

Science et Philosophie

PAR

Jules TANNERY

AVEC UNE NOTICE

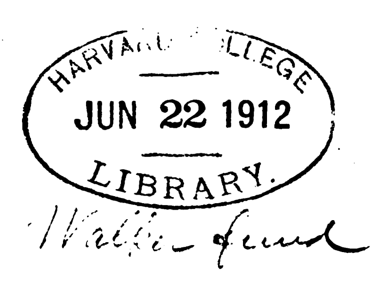
PAR

Émile BOREL
Professeur à la Sorbonne.
Sous-directeur de l'École Normale supérieure.



LIBRAIRIE FÉLIX ALCAN
108, BOULEVARD SAINT-GERMAIN, PARIS

1912


HARVARD COLLEGE
JUN 22 1912
LIBRARY.

JULES TANNERY[1]

24 MARS 1848 — 11 NOVEMBRE 1910

C'était un jeudi ; le matin, Jules Tannery avait causé avec des élèves, avec des collègues, s'était intéressé à leurs affaires particulières avec cette bienveillance toujours en éveil et jamais banale qui fut son secret ; l'après-midi, dans une réunion où l'on s'occupait des intérêts généraux de l'Université, il avait parlé avec l'élévation de pensée qui lui était coutumière ; c'est au cours de cette réunion qu'il sentit les premières atteintes du mal, il put rentrer chez lui, en voiture, accompagné d'un de ses collègues ; mais son état ne tarda pas à s'aggraver et à 3 heures du matin, tout était fini. Ce vendredi-là restera dans les souvenirs de tous ceux qui l'aimèrent ; dans les couloirs de l'Ecole Normale, dans les rues environnantes, dans tout le quartier universitaire, on s'abordait comme dans une maison en deuil ; on avait peine à croire au malheur subit ; on se rappelait combien, à la rentrée des vacances, tous les amis de Tannery s'étaient réjouis en le trouvant d'apparence mieux portant.

Nul ne fut étonné d'apprendre qu'il avait depuis longtemps fait connaître son désir d'avoir des obsèques aussi simples que possible ; on jugea cependant que ce n'était point enfreindre ses

1. Cette notice, parue dans la *Revue du Mois* du 10 janvier 1911, a été reproduite ici sur le désir de Mme Jules Tannery.

volontés que de réunir, le dimanche, avant le départ du convoi funèbre, les élèves de l'Ecole normale, en une cérémonie de famille, sans apparat et sans publicité. M. Ernest Lavisse, directeur de l'Ecole, et M. Paul Painlevé, qui fut l'un des premiers élèves de Tannery à l'Ecole et resta l'un de ses meilleurs amis, traduisirent brièvement l'émotion de tous les assistants. Ceux-ci eussent été bien plus nombreux, si l'on n'avait tenu à conserver à cette réunion le caractère intime qu'eût souhaité celui que l'on pleurait. Il aurait certainement été très touché de savoir combien de ses élèves et amis habitant la province ont regretté de ne point avoir été prévenus à temps pour venir lui rendre un dernier hommage ; mais il n'eût pas admis qu'on les y eût encouragés, fût-ce de la manière la plus discrète.

Je voudrais que les quelques pages qui suivent répondent entièrement à son idéal de véritable simplicité et de sincère modestie; je ne puis oublier cependant que le premier des enseignements qu'il me donna fut de servir la vérité et de mettre, comme il le disait volontiers, le plus d'accord possible entre les écrits et les réalités : je m'efforcerai surtout de ne point laisser l'émotion altérer la sincérité intellectuelle qu'il appréciait par-dessus tout.

*
* *

Jules Tannery naquit le 24 mars 1848 à Mantes (S.-et-O.) ; il fit ses études au lycée de Caen ; en 1866, à peine âgé de dix-huit ans, il fut reçu élève de l'Ecole normale supérieure dans la section des sciences ; il avait hésité à se présenter dans la section des lettres, pour laquelle ses aptitudes n'étaient pas moins grandes. « Combien peu d'entre nous, disait M. Lavisse, ont connu une telle hésitation. » Reçu agrégé en 1869, après

ses trois années d'Ecole, il fut d'abord professeur de lycée, à Rennes, puis à Caen ; il revint en 1872 à l'École normale comme agrégé-préparateur de mathématiques ; il termina en moins de deux ans sa thèse (1874) ; l'année suivante (1875), il fut délégué dans une chaire de mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis, puis suppléant à la Sorbonne de M. Bouquet, dans la chaire de mécanique physique et expérimentale (1875-1880) ; en 1881, il fut nommé maître de conférences à l'Ecole normale et trois ans plus tard (1884), sous-directeur des Etudes scientifiques ; il devait conserver cette double fonction jusqu'à sa mort : les changements introduits en 1904, dans l'organisation administrative de l'Ecole normale modifièrent ses titres ; il fut professeur de calcul différentiel et intégral à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris, délégué à l'Ecole normale et sous-directeur de l'Ecole normale supérieure de l'Université de Paris ; mais ce furent bien en réalité les mêmes fonctions qu'il exerça au point de vue de l'enseignement et à peu près les mêmes au point de vue administratif ; on peut résumer d'un mot cette longue période de sa vie : il aima l'Ecole normale et s'y fit admirer et aimer. Cependant, bien qu'il ne recherchât jamais les avantages matériels ni les honneurs et les refusât souvent, d'autres occupations étaient venues prendre place à côté de celles qui étaient le centre de sa vie intellectuelle : une mention spéciale doit être faite pour le *Bulletin des Sciences mathématiques* auquel, dès 1876, il consacra beaucoup de temps et beaucoup de talent. De 1877 à 1881, il avait été membre du jury d'agrégation des sciences mathématiques ; il fut depuis 1882 jusqu'à la fin, maître de conférences à l'Ecole normale supérieure d'enseignement secondaire des jeunes filles (Ecole normale de Sèvres) ; on ne peut énumérer toutes les commissions et tous

les comités dans lesquels l'élévation de son esprit et de son caractère et sa parfaite connaissance des hommes ont rendu des services éminents. En 1907, il fut élu membre libre de l'Académie des Sciences, au fauteuil laissé vacant par Brouardel.

Telle fut sa vie publique ; je croirais trahir sa confiance en parlant ici de sa vie de famille : ce que je pourrais en dire, tous ses amis le savent, et les autres n'ont aucun intérêt à le savoir. Qu'il me soit donc permis d'offrir simplement à Mme Jules Tannery et à ses enfants l'hommage ému de ma sympathie dans le malheur dont ils peuvent seuls connaître toute l'étendue.

*
* *

C'est les principes des mathématiques et la façon de les exposer qui m'ont surtout préoccupé ; je me suis particulièrement appliqué à méditer les fondements de l'analyse ; j'ai essayé d'en approfondir les principes ; j'ai tourné mes efforts vers l'enseignement, la coordination et la divulgation des vérités acquises, bien plus que je n'ai cherché à en découvrir de nouvelles.

Si l'on prenait à la lettre cette appréciation, on risquerait de se faire une idée singulièrement incomplète de l'influence exercée par Jules Tannery sur les progrès de l'analyse mathématique.

Nous ne pouvons étudier ici ses mémoires originaux [1] ; à côté d'eux, il conviendrait de citer

1. Il suffira d'en citer quelques-uns pour donner une idée de la variété et de l'étendue de ses travaux.

Sur les équations différentielles linéaires à coefficients variables (Thèse de Doctorat ; *Annales de l'Ecole normale*, 2e série, t. IV).

Sur l'équation différentielle linéaire qui relie au module la fonction complète de première espèce. — Sur quelques propriétés des fonctions complètes de première espèce (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXXVI).

Sur une équation différentielle linéaire du second ordre (*Annales de l'Ecole normale*, 2e série, t. VIII).

Lettre à Weierstrass (*Monatsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 1881).

aussi les parties originales des ouvrages d'exposition dont nous parlerons tout à l'heure ; Tannery n'était pas de ceux qui tirent, comme on dit, plusieurs moutures d'un même sac ; et si, dans ses livres, il ne manquait jamais de mentionner avec un soin minutieux qu'il devait à tel de ses élèves un fragment de démonstration ou la plus claire intelligence d'une idée, il était loin d'avoir les mêmes scrupules historiques lorsqu'il était seul en cause ; aussi beaucoup de ses lecteurs ignorent-ils combien est grande sa part personnelle dans des chapitres où la perfection didactique de l'exposition tend à laisser croire qu'il s'agit de choses depuis longtemps connues. Faire le tri de ce qui lui revient exigerait un travail considérable, qu'il n'aurait pas approuvé ; mais il convenait de signaler ce trop rare désintéressement scientifique.

Il est enfin une autre forme sous laquelle l'action de Jules Tannery sur les progrès des mathématiques a été considérable : c'est par l'intermédiaire de certains de ses élèves. Et je ne parle pas ici de l'influence générale de son enseignement, dont je tâcherai d'indiquer tout à l'heure l'importance ; je fais allusion à des découvertes mathématiques précises et importantes, qui n'auraient probablement pas été faites si tel mode de raisonnement mathématique n'avait pas été très précisément suggéré par Tannery.

Si l'on écrit un jour une histoire sincère du développement de la pensée mathématique dans

Sur les Intégrales eulériennes (*Comptes rendus*, t. XCIV).
Sur la suite de Schwab (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. V).
Note relative aux formes linéaires du troisième degré (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. I).
Sur les fonctions symétriques des différences des racines d'une équation (*Comptes rendus*, t. XCVIII).
Sur une surface de révolution du quatrième degré dont les lignes géodésiques sont algébriques (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. XVI).

ces trente dernières années, et dans celles qui suivront, cette influence devra être signalée et la place qu'occupera Jules Tannery parmi les mathématiciens de son époque apparaîtra alors comme plus importante que celle de bien d'autres savants dont la production apparente a été plus considérable.

*
* *

Mais ce ne fut pas seulement un mathématicien : ce fut aussi un professeur de mathématiques; son influence sur l'enseignement fut considérable et se fit sentir à tous les degrés. Elle a été parfois critiquée de très bonne foi par des amis désintéressés de la science ; je crois que ces critiques proviennent d'un malentendu, que Tannery n'avait pas cru possible et qu'il a tout fait pour éviter dès qu'il s'est rendu compte que sa pensée avait pu être mal interprétée. Il n'a jamais pensé, en effet, que les méthodes d'enseignement les plus abstraites fussent les meilleures ; et nul plus que lui n'a travaillé aux réformes par lesquelles l'enseignement des mathématiques doit être rapproché des réalités ; ce n'est pas de sa faute si ces réformes n'ont point encore donné tout ce qu'on aurait pu en attendre et si ce mouvement, parti de chez nous, est en train, comme il arrive trop souvent, de se propager surtout à l'étranger d'où il nous reviendra,... plus tard. Ce qu'il a toujours pensé, c'est que de futurs professeurs ne devaient point ignorer les fondements logiques des sciences qu'ils enseignaient; s'ils ne doivent pas tout dire à leurs jeunes élèves, il ne faut pas que cela soit par ignorance, mais par une claire conscience de leur devoir à l'égard d'intelligences en voie de formation. Si vraiment quelques-uns se sont mépris et ont cru de bonne foi qu'il faut enseigner la théorie des fractions à des

élèves de cinquième de la même manière qu'à des candidats à l'agrégation, cela prouverait simplement que les qualités de bon sens ne vont pas toujours de pair avec la profondeur de l'intelligence. Mais tout dans l'enseignement comme dans les écrits de Tannery met en garde contre une telle erreur, qui a été fort rare, si elle s'est réellement produite, et qu'on ne saurait en aucun cas lui reprocher.

Son influence sur l'enseignement ne s'exerçait pas seulement par les conseils qu'il donnait à ses élèves de l'Ecole normale ; les leçons qu'il leur faisait parfois lui-même sur des sujets variés étaient un excellent exemple ; il avait d'ailleurs fait ses preuves comme professeur d'enseignement secondaire ; un de ses anciens élèves de spéciales au lycée de Caen, aujourd'hui professeur à l'Ecole polytechnique et membre de l'Académie des sciences, me disait récemment combien Tannery avait contribué à la formation de son esprit par sa méthode d'enseignement : le cours, réduit aux choses vraiment essentielles, était terminé en quatre mois, et la moitié de l'année scolaire restait pour une revision accompagnée de nombreux exercices.

*
* *

Cette influence pédagogique lui survivra, grâce à ses livres. Ses *Leçons d'arithmétique*, son *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable*, ses *Leçons d'algèbre et d'analyse* pour ne citer que les principaux, sont des modèles de clarté et de précision. Les *Eléments de la théorie des fonctions elliptiques* (en collaboration avec M. Jules Molk) doivent être mentionnés à part, car ce n'est pas seulement un excellent livre d'enseignement, mais aussi une œuvre scientifique.

Il n'est pas possible à un professeur consciencieux d'enseigner sur les sujets qu'il a traités sans avoir étudié ses livres. Ceci ne veut pas dire que chacun soit tenu de le suivre pas à pas : nul plus que lui n'aurait protesté contre cette conclusion dogmatique; il savait que l'enseignement est essentiellement affaire individuelle, au double point de vue du maître et de l'élève ; ce qui est excellent ici peut être détestable ailleurs. Mais il y a toujours, pour un maître intelligent, grand profit à entrer en contact avec une pensée aussi lucide et aussi profonde que celle de Tannery, même si ses conceptions particulières ou la nature de ses élèves le conduisent à suivre d'autres chemins.

S'il m'est permis de faire appel à des souvenirs personnels, je voudrais dire quelle reconnaissance particulière je garde à l'auteur de l'*Introduction à la théorie des fonctions d'une variable ;* j'ai eu la bonne fortune d'avoir ce livre entre les mains avant d'entrer en mathématiques spéciales et de me trouver ainsi directement en contact avec lui : ce fut certainement la plus intense des joies intellectuelles que m'ait jamais procurée une lecture scientifique. Ceux qui ont lu ce livre après que les matières leur avaient été déflorées ne peuvent pas, je crois, se faire une idée complète de l'enchantement produit sur un esprit neuf par cette ordonnance simple, claire et majestueuse, qui se déroule comme un fleuve limpide sur lequel on se laisse doucement entraîner par le courant, sans fatigue, avec une admiration toujours plus vive et une curiosité toujours plus aiguë. Nulle influence n'a plus que celle-là contribué à m'orienter vers la science pure et, parmi toutes les raisons que j'ai de conserver toujours à l'égard de mon maître des sentiments d'affectueuse reconnaissance, il n'en est peut-être pas de plus profonde que l'impression produite

par ce livre [1]. Beaucoup de mes contemporains, je le sais, partagent tout à fait ces impressions.

* * *

Jules Tannery fut aussi un administrateur et. à bien des yeux, les vingt-six années qu'il a passées comme sous-directeur de l'Ecole normale resteront l'essentiel de sa vie. Ce serait là une idée bien incomplète d'une nature aussi riche ; mais, si ses fonctions administratives ne furent pas toute sa vie, c'est peut-être là qu'à côté de bien des tracas et de bien des soucis, il trouva ses plus grandes joies. Car il était de ceux pour qui le bonheur consiste surtout dans le bien qu'on fait aux autres, et qui, loin d'exiger la reconnaissance, ne la tolèrent que chez ceux auxquels ils portent une affection particulière. Il n'avait point l'âme administrative, s'il faut entendre par là une aptitude abstraite à résoudre les questions concernant les personnes en oubliant que chacune de ces personnes est un individu : et sans doute cette aptitude est-elle indispensable à ceux qui sont appelés à diriger de haut de très grandes administrations. Tannery était, au contraire, absolument incapable de comprendre qu'il pût exister deux cas identiques : M. A... et M. B... n'étaient jamais pour lui *deux* élèves de l'école, ou *deux* professeurs agrégés de quatrième classe; c'étaient M. A... et M. B..., c'est-à-dire deux individus dont l'un avait l'esprit distingué et l'autre l'esprit médiocre, dont celui-ci était bon professeur, tandis que l'autre enseignait assez mal, etc. Il est certainement bien plus aisé de se référer toujours à un « précédent » ; car il n'est pas toujours commode de

1. La nouvelle édition de cette *Introduction* a été entièrement remaniée et étendue ; le second volume en a paru très récemment ; ce fut la dernière œuvre de Tannery.

laisser entendre à M. B... les raisons pour lesquelles on se décide en ce qui le concerne; Tannery y parvenait cependant presque toujours et il savait ne jamais blesser personne, grâce à sa finesse et à son tact exceptionnels : il arrivait cependant parfois qu'il n'était pas compris de ceux qui étaient décidés par avance à ne pas comprendre... mais il ne leur en voulait jamais de leur incompréhension.

Il n'était pas moins aimé et apprécié à l'École normale de Sèvres qu'à celle de la rue d'Ulm ; il faudrait citer entièrement l'étude de Mlle Anna Cartan, dans le *Bulletin des anciennes élèves de Sèvres;* en voici du moins quelques lignes :

A Sèvres il nous connaissait toutes; il s'intéressait à chacune de nous et lui témoignait une bienveillance active. Il apportait dans le bien qu'il faisait une délicatesse telle que ses obligées n'osaient divulguer le bienfait rendu et gardaient jalousement pour elles ce qui n'était connu que du maître et de l'élève. Elles savent bien, celles qui eurent le bonheur de lui devoir beaucoup, jusqu'à quel point il fut bon; elles savent aussi qu'en retour des services rendus, M. Tannery ne désirait qu'un peu d'affection.

Dans les commissions et les comités où se discutent souvent d'importantes questions, la caractéristique de Tannery était d'élever toujours le niveau de la discussion ; par sa sincérité, par la noblesse de sa pensée, il créait véritablement une atmosphère plus saine que celle où s'agitent seulement les intérêts personnels. Dans ces discussions, une de ses caractéristiques était son incapacité absolue à oublier les bons arguments qui militaient en faveur de l'opinion opposée à la sienne; il n'était pas de ceux qui, après avoir pesé le pour et le contre, et constaté après hésitation que les raisons pour leur paraissent l'emporter, déclarent froidement avec toute leur autorité et toute leur influence que les raisons contre n'ont jamais existé à leurs yeux. Cette sin-

cérité dans la discussion serait sans doute une faiblesse dans une réunion publique ; peut-être n'en est-il pas de même dans des assemblées peu nombreuses, dont les membres se connaissent et s'apprécient à leur juste valeur.

Une autre singularité de Tannery était d'écouter les arguments et d'en tenir compte quand ils lui semblaient justes. Il ne se serait pas approprié le mot trop sceptique attribué à un grand homme d'Etat : certains discours ont influé sur ses votes ; on en pourrait citer des exemples précis.

Au temps où la sévérité relative du règlement de l'École normale amenait les élèves à souhaiter parfois quelque adoucissement à la règle, ils le trouvaient toujours disposé à faire fléchir les consignes dont le caractère était visiblement puéril et conventionnel. Par contre, il était ferme et sévère lorsqu'une sérieuse question de moralité était en jeu ; je pourrais citer un cas où, un élève s'étant rendu coupable d'un manquement grave, il ne voulut pas sanctionner le pardon indulgent du professeur de la Sorbonne mêlé à l'affaire.

Tous ses anciens élèves allaient à lui avec confiance, et il ne les décevait jamais. Beaucoup ne se bornaient pas à l'entretenir de questions scientifiques et de carrière ; il était souvent leur confident dans les questions les plus intimes, et nul ne sait tous les services délicats qu'il a ainsi rendus. Aussi était-il universellement aimé, mais en même temps respecté, car on sentait que sa bonté naturelle n'avait rien de commun avec la facile bonhomie des âmes médiocres.

Son influence sur les élèves de l'École normale pendant ces vingt-six ans fut considérable ; j'ai déjà dit quel rôle on doit lui attribuer dans le progrès des mathématiques ; mais il eut aussi parfois une action importante sur des physiciens et des naturalistes ; certains d'entre eux, et non des moindres, ne cachent pas quelle reconnais-

sance ils lui gardent des habitudes de discipline intellectuelle qu'il leur a fait prendre.

A beaucoup d'entre nous, il apprit que la sincérité intellectuelle, la claire compréhension de sa propre pensée, la défiance vis-à-vis des mots qui ne recouvrent rien, ne sont pas seulement des qualités intellectuelles, mais aussi des qualités morales. Et si, au moment d'une crise qui divisa la conscience française, il jugea que ses fonctions administratives ne lui permettaient pas une certaine forme d'action publique, qui n'était d'ailleurs pas dans son tempérament, et se contenta de faire connaître publiquement et nettement son opinion, on peut être certain que les habitudes de pensée qu'il créait autour de lui jouèrent un rôle essentiel dans l'élan superbe qui se produisit à l'École normale en faveur de la Justice et de la Vérité.

*
* *

Ce fut aussi un philosophe. Il s'intéressait surtout, d'une part à la logique des sciences, et d'autre part à ce que l'on doit peut-être encore appeler la métaphysique, faute d'un meilleur vocable.

Ses écrits philosophiques sont très dispersés ; il avait projeté de les réunir en un volume ; ce projet sera prochainement réalisé sur le plan même qu'il avait conçu[1]. On verra mieux alors

1. C'est au volume présent que je faisais allusion. Ce volume avait été promis par Jules Tannery à la Collection Scientifique pour les premiers mois de 1911 et il aurait certainement été prêt en temps utile, car Tannery m'en avait souvent parlé : il projetait d'écrire quelques pages pour relier entre eux certains fragments ; on y a suppléé en reproduisant des extraits de ses analyses dans le *Bulletin des sciences mathématiques*, dont les lecteurs apprécieront le très grand intérêt et la grande importance pour l'histoire de sa pensée. On a supprimé, autant que possible, dans ces extraits d'analyse, ce qui n'avait d'intérêt que comme *compte rendu* de livre, pour conserver la pensée propre de Tannery.

l'unité et l'importance de sa doctrine. Il est, je crois, impossible de la résumer sans la mutiler et je ne m'y essaierai pas : je préfère renvoyer les lecteurs de cette *Revue* à deux articles qu'il a publiés ici même et dont l'un est relatif à la logique des sciences[1] tandis que l'autre est plutôt métaphysique[2]. Dans ce dernier, il livre le fond de sa pensée sur quelques-uns des plus grands problèmes qui aient préoccupé les hommes. Cette pensée est complexe, car son intelligence était trop critique et trop profonde pour se satisfaire d'aucune solution simpliste ; mais si nul mieux que lui peut-être n'a senti les nuances de la vie intérieure, il n'a jamais eu assez d'orgueil intellectuel pour mépriser la raison. Aussi sa métaphysique ne pouvait-elle compter sur les suffrages de ceux dont l'admiration aveugle et hyperbolique n'est déterminée que par le désir secret de voir renverser les idoles modernes au profit des idoles anciennes ; il ne satisfaisait pas non plus ceux pour qui les explications mécaniques de l'univers sont absolument claires et suffisantes ; mais, s'il n'avait pas eu l'horreur véritable de toute publicité, s'il ne s'était pas appliqué au contraire à ne pas se poser en créateur de métaphysique, son nom aurait été vite connu du grand public comme celui d'un de ces philosophes qu'il est de mode d'admirer d'autant plus qu'on les a moins lus. Il n'avait aucun goût pour ce genre de notoriété ; il ne s'était même pas décidé sans peine à ce projet de réunion de ses écrits trop dispersés ; juge toujours trop sévère pour lui-même, il disait volontiers que « cela n'en

1. De la Méthode en mathématiques, *Revue du Mois* du 10 janvier 1908, t. V, p. 5, cet article a été reproduit dans la *Méthode dans les Sciences ;* on doit signaler aussi comme très important l'article sur le Rôle du nombre dans les sciences (*Revue de Paris*, 1895, t. IV) (ci après p. 11).

2. L'Adaptation de la pensée (*Revue du Mois* du 10 août 1906, t. II, p. 129) (ci-après, p. 40).

valait pas la peine » ; le même sentiment l'avait amené à laisser inédits certains manuscrits dont il serait bien désirable qu'une partie au moins soit publiée[1]. C'est seulement après ces publications diverses qu'on pourra essayer de reconstituer son système philosophique ; je serais étonné que cette œuvre ne tente pas quelque jeune philosophe et ne soit alors pour le public instruit une véritable révélation.

* * *

Je devrais dire aussi quel écrivain admirable fut Tannery ; lettré délicat, poète à ses heures, il alliait d'une manière singulièrement rare l'élégance et la pureté du style à la précision scientifique de la pensée. Dans sa longue collaboration au *Bulletin des sciences mathématiques*, il édifia une œuvre critique importante et qui mériterait une étude particulière. Sous une forme toujours courtoise, avec une ironie très douce et une finesse très enveloppée, il savait réunir l'exactitude détaillée du compte rendu, la sincérité du jugement, l'originalité des réflexions personnelles suggérées par l'œuvre analysée : il a parfois suffi d'une seule de ces trois qualités pour fonder une réputation de critique. Le trait était quelquefois assez léger pour n'être aperçu que du lecteur averti ; je ne suis pas sûr que l'auteur d'une compilation de problèmes avec solutions n'ait pris pour un éloge cette conclusion : « Monsieur X. a donné aux candidats à la licence d'excellents exemples des solutions qu'on attend d'eux. »

Le travail du *Bulletin* aurait suffi à absorber toute l'activité scientifique d'un homme ; il en parlait si peu que beaucoup en ignoraient l'im-

1. Depuis que ceci a été écrit, ses *Pensées* ont paru dans la *Revue du Mois*.

portance. Cette façon de procéder lui était d'ailleurs coutumière; pendant longtemps, il assuma tous les ans la lourde tâche des examens oraux d'entrée à l'Ecole, tandis que le second examinateur de mathématiques ne voyait son tour revenir que tous les trois ans ; en même temps, il revisait chaque année les épreuves écrites du concours pour les bourses de licences. Lorsque les deux concours réunis représentèrent une charge plus que doublée, il se laissa, difficilement, persuader de consentir à une répartition plus équitable : ce ne fut pas sans regret qu'il s'y décida, car il n'ignorait pas que les examens étaient mieux faits par lui que par tout autre, et savait mieux que personne que la qualité du recrutement de l'Ecole normale, c'est pour ainsi dire toute l'Ecole normale. Il tint à faire les examens une dernière fois en juillet 1910 et n'hésita pas à violenter sa nature au point d'user de dissimulation : pour empêcher les siens et ses collègues de peser sur sa décision, il ne la leur fit connaître qu'après qu'elle eut reçu la sanction officielle, et rien ne put alors le décider à la modifier. Il opposa d'ailleurs toujours la même résistance à ceux qui auraient eu une grande joie à le soulager partiellement dans son service : « Mon cher ami, vous êtes bien gentil, et je sais que je puis compter sur vous; je vous promets d'y recourir dès que j'en ressentirai le besoin; mais, fort heureusement, je suis encore capable de faire mon devoir et je dois en donner l'exemple. » On ne pouvait que s'incliner et peut-être fut-il plus heureux d'avoir pu se dire à ses derniers instants qu'il avait été jusqu'au dernier jour le bon ouvrier.

*
* *

Après avoir parlé du mathématicien, du pro-

fesseur, de l'éducateur d'esprits, de l'administrateur, du philosophe, de l'écrivain, du critique, de l'examinateur, il faudrait faire revivre l'homme. Mais ici je crains que la tâche ne dépasse trop mes forces. Ceux qui ne l'ont point connu ne sauront jamais ce qu'étaient la douceur, la noblesse, la finesse de sa physionomie; ils ne pourront imaginer ce regard voilé et doux, et cependant si pénétrant et si fin ; ils ne se rendront jamais compte comment sa conversation pouvait rester toujours élevée sans cesser d'être familière, toujours sérieuse sans être jamais ennuyeuse, très souvent plaisante et gaie sans être jamais triviale. Aucun ami ne fut plus sûr, aucun caractère ne fut plus noble.

Pendant longtemps encore, ses élèves et ses amis se demanderont, en présence d'une difficulté quelconque ou d'un problème moral délicat : qu'aurait pensé, qu'aurait conseillé Tannery ? Pendant longtemps encore, on se représentera difficilement que l'on doit se passer de ses critiques ou de son approbation indulgente et l'on ressentira d'une manière aiguë le désir de le consulter ; malgré la force avec laquelle s'imposent les tristes réalités, ce désir renaîtra souvent chez tous ceux dont il était la conscience vivante.

ÉMILE BOREL.



SCIENCE ET PHILOSOPHIE

PREMIÈRE PARTIE

PHILOSOPHIE

CHAPITRE PREMIER

LA CONTINUITÉ ET LA DISCONTINUITÉ DANS LES SCIENCES ET DANS L'ESPRIT

Certains esprits sont plus frappés par ce qui distingue et sépare les choses, par les caractères qui semblent déterminer les espèces, par les combinaisons de formes et les groupements de forces qui permettent l'équilibre, en général par ce qui est discontinu ; d'autres, au contraire, là où ils trouvent la discontinuité, cherchent quelque liaison cachée : pour eux, l'équilibre n'est qu'un mode du mouvement ; l'espèce, qu'un moment de repos dans l'évolution : les distinctions ne sont que relatives.

Ces deux points de vue se retrouvent dans toutes les sciences, en mathématiques comme en physique et en histoire naturelle. Aussi bien, il y a plus de rapports que l'on ne croit communément entre celles des sciences qui semblent les plus éloignées ; l'observation joue le plus grand rôle dans les recherches mathématiques et l'induction y est constamment employée. Le mathé-

maticien observe les formes géométriques et analytiques comme un naturaliste observe les êtres qu'il étudie. La vérité semble aussi extérieure à l'un qu'à l'autre. Les propriétés mathématiques apparaissent à celui qui a donné à ses facultés une éducation suffisante avec le même degré de netteté que les délicatesses de l'organisme à celui qui a l'habitude du microscope. L'un et l'autre ne pouvaient, en regardant, manquer de voir ce qu'ils voient.

Dans les sciences mathématiques comme dans les sciences physiques, on s'est élevé peu à peu des vérités de détail aux vérités générales ; ce n'est qu'après de longs et pénibles efforts que l'on est parvenu à ces propositions, admirables par leur simplicité et leur généralité, qui s'établissent aujourd'hui d'une façon si directe et si naturelle qu'elles auraient dû, ce semble, être rencontrées tout d'abord.

Mais il y a un rapprochement plus étroit et plus singulier : le calcul intégral a mis en lumière certaines fonctions transcendantes qui ont comme une individualité, une vie propre ; elles ont des caractères, des propriétés qui les définissent nettement ; elles se réunissent en groupes, en espèces, en genres, et les classifications que l'on en fait ne sont certainement pas plus arbitraires que les classifications de l'histoire naturelle. Il y a plus encore peut-être : on peut souvent passer d'une manière continue d'une de ces fonctions à une autre, d'un de ces individus mathématiques à un autre individu qui paraît tout différent, comme la théorie de l'évolution permet de passer d'une espèce à une espèce voisine, et, de proche en proche, à

une espèce plus éloignée ; mais les intermédiaires n'ont pas l'importance de ces êtres étranges qui, sans d'autres organes que des symboles abstraits, ont cependant une physionomie assez accusée pour se faire reconnaître partout où ils se trouvent : ils ne jouent qu'un rôle effacé et souvent arbitraire. De même, dans l'ordre de la vie réelle, les individus que l'on suppose avoir permis la transition d'une espèce à une autre ont disparu sans laisser de traces ; ceux-là seuls ont résisté chez lesquels le groupement des différents organes et une adaptation convenable au milieu satisfaisaient aux conditions d'un équilibre stable.

C'est par l'analyse, par les divisions, par l'affirmation de la discontinuité que les sciences débutent, la première chose à faire dans toute science étant sans doute de distinguer nettement les objets dont elle s'occupe. En mathématiques, c'est bien l'étude des choses discontinues qui a fait, au commencement, les progrès les plus rapides ; la théorie des nombres, celle des polyèdres réguliers, qui entrait dans la cosmogonie de quelques philosophes, ont été poussées très loin par les anciens, Les Indiens étaient en possession, pour la résolution des équations indéterminées du premier degré, de méthodes qui n'ont été retrouvées que par Euler.

L'idée de la continuité, qui a donné naissance au calcul différentiel et intégral, n'est apparue clairement qu'au XVII[e] siècle. Il en a été de même ailleurs. La transformation des forces physiques, celle des espèces, qui n'est point encore complètement admise, sont des doctrines toutes récentes. Mais l'analyse, les distinctions, la discontinuité, ne sont pas qu'au commence-

ment de la science, elles en suivent tous les développements et s'y mêlent ; les synthèses, les interpolations, les théories transformistes ne les y effacent point; la transformation n'est pas l'identité, ni la chaleur n'est l'électricité ou un travail mécanique, ni un singe, même sans queue, n'est un homme.

Les derniers résultats des sciences ont fait illusion à quelques savants et surtout à quelques philosophes qui se mêlent d'être savants. On a voulu réduire à des actions mécaniques, ramener au pur mouvement tous les phénomènes physiques ou chimiques, même ceux de la vie et de la pensée. Il y aurait peut-être lieu de faire ressortir ce qu'il y a d'aventureux, de peu scientifique dans une pareille induction, légitimée dans un petit nombre de cas, étendue de suite à l'infinité des choses. Mais, si cette prétention est légèrement outrecuidante en fait, elle semble, au moins lorsqu'on la laisse toute crue, insoutenable en théorie.

Sans doute, il est commode de substituer à la réalité complexe, touffue, inextricable, les abstractions simples des mathématiques. Tout ramener à des formules, à des identités dont le développement explique tout, cela est séduisant. Supprimer tout désordre, toute contingence, toute liberté et s'absorber, sans rien regretter, dans la contemplation de l'ordre, de la nécessité absolue, cela ne manque pas de grandeur.

Retrouver, à l'aide d'un travail patient d'observation, cette explication métaphysique du monde, que les anciens philosophes voulaient donner *a priori*, c'est une chimère que l'on caresse volontiers et une espérance qui soutient

encore plus d'un savant : le but est toujours le même, seulement on espère l'atteindre par une autre voie, plus longue assurément, mais que l'on dit plus sûre.

La pénible route, où les générations meurent et se succèdent, n'aboutit point, elle se perd dans l'infini ; aucun soleil ne se lèvera pour dissiper l'obscurité qui est au fond des choses et n'éclairera le divin et idéal sommet d'où l'on voudrait tout voir dans une pleine lumière. Il n'y a pas d'explication. Il n'y a que des faits qui, sans doute, semblent connexes, mais qui peut-être ne sont pas contenus les uns dans les autres ; ils se suivent, mais rien ne prouve qu'ils s'engendrent. De pures abstractions, des formules logiques, des identités mathématiques ne seront jamais adéquates à la réalité multiple et diverse. Admettons que tout phénomène soit lié à un mouvement défini de la matière, qu'il se produise toutes les fois que ce mouvement se produira, il n'y a point pour cela identité entre le phénomène et le mouvement ; l'esprit pensera toujours les deux choses comme essentiellement distinctes et n'ayant entre elles qu'une liaison de fait. Qu'elles soient ainsi liées, c'est une propriété merveilleuse et inexplicable de la matière ; elle est telle, mais pourrait être autre [1], on ne peut que la constater, et jamais l'expérience ne donnera à une vérité ce caractère de nécessité en dehors duquel il n'y a point lieu de chercher une explication.

Cette conception pratique de la nécessité à laquelle l'expérience nous conduit, en nous

1. Voyez le remarquable travail de M. E. Boutroux : *De la contingence des lois de la nature.* Paris. Félix Alcan, 6e édit., 1908.

montrant le retour des mêmes phénomènes, perd toute sa valeur quand on songe à la durée si courte de notre race dans le temps indéfini. Cette constance que nous observons dans les lois physiques, cet ordre que nous admirons dans l'univers ne regardent que nous. Nous mourons plus vite que le monde ne change.

Au surplus, si le progrès des sciences est loin de rendre plus certaine l'invariabilité, même relative, des rapports que les choses présentent entre elles, notre esprit ne conçoit clairement le rapport de deux choses que lorsqu'il conçoit l'une comme étant identiquement contenue dans l'autre, il ne paraît pas qu'il y ait de différence entre la nécessité et l'identité. Si donc, il n'y a aucune identité entre un phénomène réel et une abstraction comme le mouvement, il faut abandonner cette substance, vidée de toute espèce de qualité, dont le pur mouvement devait rendre raison de ce qui est, il faut restituer à la matière concrète, active, vivante, ses propriétés multiples, contingentes, aussi hétérogènes que les phénomènes qui en sont les manifestations ; il y aurait même quelque franchise à avouer que, puisque l'on ne sait point ce qu'est la substance et ce que sont les qualités de la substance, on ne fait pas un grand progrès en admettant une substance unique douée de propriétés distinctes plutôt que deux ou plusieurs substances radicalement différentes. « Donnez-moi de la matière et du mouvement, a-t-on dit, et je ferai le monde. » Il aurait fallu dire : « Donnez-moi la matière telle qu'elle est », en d'autres termes : « Donnez-moi le monde tel qu'il est » ; nul doute alors qu'il ne soit aisé de le reconstruire.

Quant à ceux qui, ne voulant pas admettre d'autre réalité objective que le mouvement, soutiennent que nous mettons dans les choses des différences qui n'existent que dans nos sensations, s'ils veulent que l'homme soit absolument distinct du milieu qui l'enveloppe et qui, d'après eux, le constitue, il n'est point utile de leur répondre.

En dehors des mathématiques, il faut renoncer à rien expliquer ; il faut observer les faits et les coordonner. Leur succession continue peut, d'ailleurs, être connexe à des transformations de mouvement ; les sciences modernes semblent le montrer dans quelques circonstances, et c'est un de leurs plus beaux résultats : elles autorisent, dans une certaine mesure, les esprits un peu romanesques à croire qu'il en est toujours ainsi. De cette façon, les différents mouvements de la matière permettraient à ses diverses propriétés de se manifester, à peu près comme dans un théâtre, les mouvements des machinistes font apparaître tour à tour des paysages ou des palais à des spectateurs qui ne peuvent comprendre pourquoi ces mouvements cachés, qu'ils ne voient même pas, peuvent amener sur la scène un décor ou un autre. Si les choses étaient ainsi, on ne serait point obligé de donner la même valeur aux différents décors que nous offre le spectacle de la réalité, aux phénomènes physiques et chimiques et à ceux de la vie et de la pensée.

Quoi qu'il en soit et quelques progrès que fassent les sciences, on étudiera toujours des faits isolés, des individus et les façons dont ils se changent les uns dans les autres. Les résultats de cette double étude s'éclairent d'ailleurs mutuellement, loin de se contredire ; mais il est curieux

de voir combien l'habitude de se placer à l'un ou à l'autre des deux points de vue modifie profondément la nature d'esprit des savants, au point que leurs cerveaux ne semblent plus organisés de la même manière. Comme on le disait en commençant, les uns voient partout la discontinuité, les autres voient partout la continuité : toutes les idées philosophiques, religieuses, politiques, les caractères mêmes se façonnent d'après cela.

Les uns sont dogmatiques : ils ont des principes formels et qu'ils proclament invariables. Les êtres et les arguments sont rangés, encastrés, étiquetés dans des catégories à leur usage ; ils en tirent, selon leurs besoins, des majeures et des mineures pour en construire des syllogismes dont ils croient les conclusions inattaquables. Plusieurs poussent l'amour du discontinu, du décousu, jusqu'à croire au surnaturel, aux miracles. Ils sont volontiers catholiques ou protestants orthodoxes. Quelques-uns font de la métaphysique et se complaisent dans des combinaisons de mots qu'ils prennent pour des déductions d'idées. En politique comme ailleurs, ce sont des hommes à système : on en voit de légitimistes, de révolutionnaires, de socialistes. Leurs caractères ont parfois de la fermeté, de la grandeur. Ils puisent dans l'énergie de leurs convictions une grande force de résistance et ils se brisent plus aisément qu'ils ne plient. Ils sont utiles d'ailleurs. Les principes les plus opposés contiennent toujours une certaine quantité de cette vérité qui est éparse partout, condensée dans une formule. Les hommes « qui se donnent le ridicule d'avoir des principes », se figurent posséder des droits à l'autorité et en font acte.

Ils sont volontiers chefs d'école, ils groupent autour d'eux des forces qui, dispersées, n'auraient rien produit. Sans eux, toute organisation serait impossible. On a voulu restreindre leur rôle aux débuts de l'organisation politique ou scientifique, et on les dit nuisibles dans une société suffisamment avancée. Sans doute, ils peuvent être gênants, mais il n'est pas prouvé qu'il y ait en vérité une origine à quoi que ce soit et que chaque moment ne doive pas être regardé comme l'origine de ce qui va suivre.

Les autres sont le plus souvent un peu sceptiques. On ne s'arrête pas, on ne se repose pas dans la contemplation du continuel devenir, du perpétuel écoulement des choses, des transformations incessantes et indéfinies. Dans l'immense tableau où ceux-ci et ceux-là veulent représenter le monde, les premiers cherchaient les lignes, les formes précises, les contours bien dessinés ; les seconds s'efforcent de rendre les couleurs fuyantes, les reflets, les nuances qui se fondent, la vie qui circule et donne aux êtres une expression mobile, ondoyante. Ils se défient des déductions et n'emploient guère le syllogisme. Ils regardent habituellement les religions positives comme l'œuvre de notre activité créatrice, quelques-uns vont jusqu'à les étudier, d'autres ne s'en occupent point. Ils doutent beaucoup de la métaphysique, ont un peu de mépris pour ses prétentions et se moquent de ses formules. Certains d'entre eux prennent l'évolution pour une explication, et sont les dupes d'un dogme dont il convient seulement d'être les apôtres. En politique, ils sont généralement progressistes, à la fois très radicaux en théorie et très modérés

dans la pratique; car ils savent que rien ne demeure, mais que tout change lentement. Ils n'ont aucune confiance ni dans les systèmes absolus, ni dans les panacées sociales; ils savent bien tout ce qu'il y a au monde de misères, de souffrances, mais ils s'attristent de ne connaître que des remèdes peu efficaces, et ils croient que les charlatans ne peuvent qu'empirer les maux qu'ils veulent guérir. Ces maux, ils disent qu'il faut les étudier tout d'abord si l'on veut les diminuer un peu dans un avenir dont l'éloignement les effraye. Quelques-uns se consolent un peu facilement et en sont arrivés à trouver trop intéressant le monde tel qu'il est, pour désirer qu'il s'améliore. Ils réclament tous une certaine mobilité dans les institutions; ils veulent qu'on laisse le jeu des forces naturelles les transformer peu à peu; ils vont jusqu'à prédire les plus graves désordres aux nations que le despotisme tiendrait immobiles et enchaînées, Ils n'ont pas toujours dans le caractère une raideur parfaite. On les voit tenir compte des circonstances et expliquer, avec une indulgence mêlée d'un peu de dédain, les fautes de leurs adversaires.

Les uns et les autres ont toujours lutté et continueront de lutter. Aucun parti ne sera jamais définitivement vainqueur. C'est par cette lutte que la science se fait et que la société se transforme. Quels sont ceux qui servent mieux la cause du progrès? On sait qu'il est généralement inutile de se poser des questions de cette nature, car celui qui les pose comme ceux qui les résolvent appartiennent eux-mêmes à l'une des deux catégories, et décident la chose suivant leur propre nature d'esprit.

CHAPITRE II

LE ROLE DU NOMBRE DANS LES SCIENCES

Laissons de côté le pur idéaliste, pour qui rien n'existe que sa propre pensée : abandonnons-le au rêve qu'il poursuit dans sa solitude, de la naissance à la mort. Pour les autres que cet homme-là, il y a quelque chose qui n'est pas eux, il y a un univers dont ils sont une partie quelque peu distincte. Distincte, dans quelle mesure ? On ne s'attend pas à ce que je réponde à cette question, ni que j'essaie, après tant d'autres, d'éclaircir ou d'obscurcir le problème de la personnalité humaine : je veux dire seulement quelques mots sur la façon dont les hommes connaissent (ou croient connaître) le monde extérieur.

C'est nous et nos états de conscience que nous connaissons directement : nous constatons dans ces états des persistances, des ressemblances et des différences : il reste à admettre que ces états de conscience correspondent au monde extérieur, aux phénomènes qui persistent, qui se ressemblent, qui diffèrent. Cette correspondance, si elle était parfaite, serait telle qu'à chaque différence dans le monde extérieur répondît une différence dans notre pensée, et réciproquement ; alors, notre pensée, où chaque phénomène viendrait se peindre, équivaudrait, en un certain sens,

à l'ensemble des phénomènes ; l'imperfection de notre connaissance consiste essentiellement à confondre des objets qui sont distincts, ou à regarder comme distincts des objets qui sont identiques.

Dans la mesure où la correspondance entre les objets extérieurs et nos états de conscience satisfait aux conditions dont je viens de supposer la perfection, nous parvenons à une connaissance du monde extérieur qui est indépendante de nous, au moins lorsque nous n'affirmons dans les choses extérieures que des différences ou des analogies. On dit communément : le bleu et le rouge ne sont pas dans les objets, c'est en nous qu'est la sensation de bleu ou de rouge; d'accord ; mais lorsque nous affirmons qu'un objet bleu diffère d'un objet rouge, nous affirmons autre chose que la différence entre deux sensations, nous affirmons quelque chose du monde extérieur, et qui ne dépend pas de nous. Toutefois, dans cette connaissance des choses, non de nous, dans cette connaissance qui ne dépend pas de la façon dont les différents phénomènes du monde extérieur éveillent nos différentes sensations, subsiste nécessairement une ignorance radicale, dont nous n'avons aucun moyen de nous débarrasser : concevons deux univers, l'un qui sera, si l'on veut, l'univers réel, l'autre un univers imaginaire, mais tel que chaque phénomène qui s'y passe réponde exactement à un phénomène du monde réel et réciproquement ; je n'ai, je ne puis avoir aucune raison de croire à l'existence du premier plutôt qu'à celle du second ; je ne connais pas l'un plutôt que l'autre ; ils sont équivalents pour moi comme deux livres écrits

dans deux langues, mais dont l'un est la traduction exacte de l'autre. Bien comprendre cette équivalence, c'est comprendre en quoi notre connaissance du monde extérieur est relative à nous, et comment elle est nécessairement relative, si parfaite qu'on la suppose. On voit assez, sans que j'y insiste, que, de ce point de vue, le débat sur la préférence qu'il convient d'accorder à une hypothèse scientifique ou à une autre perd souvent toute signification [1] ; deux conceptions qui semblent très différentes s'équivaudront entièrement si l'on peut faire correspondre chaque élément de l'une à chaque élément de l'autre ; elles s'exprimeront exactement par le même langage, si l'on convient de noter par les mêmes mots deux éléments correspondants des deux conceptions.

Si quelque connaissance du monde extérieur, indépendante de nous-mêmes, est possible, comment s'organise-t-elle, comment devient-elle une science, et comment cette science se vide-t-elle de plus en plus de ce qui est nous, de ce qui est nos sensations, pour ne plus conserver que la trace des relations entre les choses ?

Tout d'abord, à nos sensations, nous substituons des signes, des mots qui leur correspondent : lors même qu'il s'agit d'une sensation simple, il est d'une importance considérable d'avoir remplacé cette sensation par un mot qui l'isole des autres sensations. Bien que des hommes, qui ont appris la même langue, dési-

1. On trouvera d'intéressants exemples dans un article de M. Duhem inséré dans la *Revue des Questions scientifiques* (juillet 1894) ; au reste, plusieurs des idées développées par M. Duhem, dans cet article ou ailleurs, se retrouveront ici.

gnent les mêmes couleurs par les mêmes mots, on ne peut affirmer cependant qu'une même couleur éveille chez tous la même sensation, on peut affirmer seulement que chacun distingue ce que les autres distinguent, reconnaît comme analogue ce que les autres reconnaissent comme analogue ; si l'un d'eux voyait rouge ce que les autres voient vert, et vert ce que les autres voient rouge, il continuerait d'appeler rouges les objets que les autres appellent rouges, il répéterait les mots qu'on lui a appris. Cette remarque, bien banale, montre comment, pour la communication entre les hommes, la sensation qu'un mot éveille chez chacun d'eux importe peu ; ce qui importe, c'est que chacun applique les mêmes mots aux mêmes objets : il y a ainsi, dans les mots les moins abstraits, comme une tendance à éliminer les sensations individuelles.

A mesure, d'ailleurs, que les mots deviennent plus abstraits et plus généraux, on s'aperçoit mieux que leur véritable fonction est de désigner des ressemblances ou des différences, de grouper les objets par quelque relation commune, qui les distingue des autres : tantôt les groupes ainsi formés sont nettement séparés, tantôt ils sont contenus les uns dans les autres, tantôt ils empiètent les uns sur les autres ; c'est la pensée des rapports de cette nature que les mots abstraits éveillent dans notre esprit, c'est sur ces rapports que sont fondés les raisonnements scientifiques.

Suivez quelqu'un de ces raisonnements : c'est à peine si les mots feront naître dans votre esprit quelques images vagues, vite évanouies ; les mots se suivent ; la logique règle la correc-

tion de leur assemblage, comme la grammaire règle la correction de leurs accords. Plus un raisonnement est un raisonnement scientifique, plus c'est un raisonnement de mots, un raisonnement de signes, et c'est par là qu'il exprime des relations qui ne dépendent pas de celui qui le fait, ou qui le comprend. Par contraste, ouvrez un poète : des mots vont jaillir des images et des sensations ; c'est vous, c'est une âme pareille à la sienne, que le poète veut émouvoir ; s'il se sert des choses, ce n'est que pour arriver à vous ; et les mots, pour lui, sont-ils des signes ? Oui, encore, mais vous l'oubliez, pendant que leur harmonie vous enchante et que les sensations qu'ils évoquent vous envahissent. Pour le poète, la puissance d'évocation qu'il y a dans les mots est trop faible ; pour le savant, les mots sont encore trop imprégnés de sensation, ils ne sont pas assez décolorés ; ils désignent trop des objets ou des groupes particuliers ; tout en exprimant des relations entre les objets ou les groupes, ils font penser non seulement à ces relations, mais encore aux objets ou aux groupes, et cela est de trop ; c'est le nombre et la science des nombres qui va fournir un ensemble de signes vraiment approprié à n'exprimer que des relations.

La notion du nombre entier, soit qu'on la tire de la notion de collection, soit qu'on la confonde avec la notion de rang, de *numéros* qui se suivent dans un ordre déterminé, suffit à engendrer l'arithmétique, l'algèbre, l'analyse entière. Ces sciences, il est vrai, se sont développées le plus souvent en vue d'applications réelles ; mais elles sont indépendantes de ces applications, elles se

suffisent à elles-mêmes; les problèmes qu'elles traitent s'engendrent l'un l'autre et se posent, l'un après l'autre, en devenant de plus en plus complexes, de plus en plus généraux, et leur unique matière se ramène toujours au nombre qui, en dernière analyse, se réduit toujours au nombre entier. Faites sur les nombres telles ou telles opérations, vous trouverez tel résultat : c'est à cela que se réduit la pure mathématique. Qu'une pareille étude préoccupe les hommes depuis des milliers d'années, qu'elle ait produit des milliers de volumes, dont le nombre s'accroît tous les jours, que les gouvernements paient des gens pour s'y livrer et pour l'enseigner, cela n'est pas sans causer quelque étonnement, d'autant que ceux-là même qui s'y livrent avec le plus de passion, qui y obtiennent les plus beaux résultats, fatigués de vivre dans un monde d'où presque toute réalité a été bannie, las de ne manier que des symboles, ne peuvent se défendre parfois de penser que tout leur travail n'est qu'un jeu inutile. A quoi bon construire laborieusement ce temple de la Nécessité logique, à quoi bon savoir comment s'agencent et s'enchevêtrent ses diverses parties, ses voûtes, ses étages et ses demeures particulières, s'il doit rester vide? Et la Nécessité logique, la déesse du temple, que gouverne-t-elle? Rien que des conséquences de suppositions. Supposez ceci, il en résultera cela. Ces conséquences, elle les enchaîne d'une façon rigoureuse, elle règne sur elles en maîtresse absolue, implacable; mais quels sujets est-ce là? Ne sont-ils pas quelque peu chimériques, comme les suppositions qui les ont engendrés? C'est dans ce temple pourtant que viendra se

ranger et s'organiser notre connaissance du monde extérieur.

Comment cela peut-il se faire? Simplement en substituant aux choses des nombres qui leur correspondent, en vertu de certaines définitions. Si l'on peut concevoir *a priori* qu'une pareille correspondance soit possible, les différences entre les choses se traduisant par des différences entre les nombres, si l'on conçoit même qu'elle puisse se faire d'une infinité de façons, ce qui reste étonnant, c'est qu'elle nous serve à quelque chose et qu'elle ne nous jette pas dans d'inextricables complications, où notre intelligence ne puisse se débrouiller ; et cet étonnement subsiste lors même que l'on se rend compte que ce monde numérique que nous substituons à la réalité est loin de lui correspondre exactement, et ne peut se construire que grâce à d'extraordinaires simplifications. Ce monde simplifié, que le travail scientifique de chaque jour complique continuellement pour le mieux adapter à la réalité, nous représente de mieux en mieux le monde réel, comme une suite de cartes géographiques, d'abord très simples, et de plus en plus détaillées, nous font connaître de mieux en mieux la surface du globe terrestre, et nous permettent finalement d'y voyager, en sachant à chaque instant où nous sommes, pourvu que nous sachions lire ces cartes et que nous connaissions le système de projection dans lequel elles ont été construites.

Pour construire une carte, il y a une infinité de systèmes de projections : parmi ces systèmes on choisit ceux qui nous fournissent les représentations les plus facilement intelligibles. La

science du monde extérieur ne sera possible que si elle se résume en formules suffisamment simples, assez simples pour que notre esprit puisse les saisir ; l'œuvre essentielle du génie scientifique sera donc, parmi les modes de correspondance entre les nombres et les objets extérieurs, de choisir ceux qui conduisent à des lois simples. Que cela soit possible, au moins dans une certaine mesure et entre certaines limites d'approximation, c'est un fait, puisque la science existe.

Cette simplicité de ce qu'on appelle les lois de la nature, à propos de laquelle on me permettra une courte digression, est une condition de notre connaissance du monde extérieur : elle ne regarde peut-être que nous, et l'on a dit avec raison qu'elle n'importerait pas à une intelligence capable de suivre les phénomènes dans leur infinie complexité. Tout le monde a lu la page éloquente, banale à force d'être citée, par laquelle Laplace termine l'*Exposition du système du monde*. « Séduit par les illusions des sens et de l'amour-propre, l'homme s'est regardé longtemps comme le centre du mouvement des astres... Enfin, plusieurs siècles de travaux ont fait tomber à ses yeux le voile qui couvrait le système du monde. Alors il s'est vu sur une planète presque imperceptible dans le système solaire, dont la vaste étendue n'est elle-même qu'un point insensible dans l'immensité de l'espace. Les résultats sublimes auxquels cette découverte l'a conduit sont bien propres à le consoler du rang qu'elle assigne à la Terre, en lui montrant sa propre grandeur dans l'extrême petitesse de la base qui lui a servi pour mesurer les cieux. » En vérité, il

n'y a, dans la conception de Kopernik et dans ses conséquences, ni humiliation ni consolation. Ce n'est plus le corps de l'homme, c'est toujours sa pensée qui est le centre de l'univers, de l'univers qu'elle connaît : et c'est pourquoi l'homme a adopté le système de Kopernik, qui lui donnait des mouvements des astres une représentation plus simple, plus conforme à la faiblesse de son intelligence que celle qu'il pouvait avoir en se regardant lui-même comme immobile. Mais qu'entend-on lorsqu'on dit qu'un système est plus vrai que l'autre? Que l'on rapporte le mouvement des astres à la Terre ou au Soleil, ne peut-on pas déduire un mouvement de l'autre? C'est un problème que les astronomes résolvent continuellement; les deux conceptions sont équivalentes, seulement l'une est plus commode que l'autre. A la vérité, le système de Kopernik, même en le complétant par les lois de Képler, ne représente le mouvement des astres que d'une façon assez grossière; mais que dire de la loi de Newton, d'une formule si brève qui permet de représenter d'une façon si précise tant de mouvements compliqués? Si même elle est seule de cette espèce, la simplicité de cette loi décourage l'admiration et arrête le sourire du philosophe devant les gens qui rêvent je ne sais quels accords mystérieux entre les choses et notre pensée.

C'est là un fait : quelque science du monde est possible. Dans l'infinie complexité des choses, il est possible de débrouiller certaines correspondances qui se traduisent par des formules simples que notre esprit peut saisir facilement. Souvent on n'obtient cette simplicité qu'en se résignant à ne représenter les choses qu'imparfaitement,

comme on se résigne, pour leur apprendre la géographie, à mettre entre les mains des enfants des cartes simplifiées; dans quelques cas ces formules simples permettent d'aller très loin dans la connaissance des choses.

J'arrive aux sciences particulières, en les rangeant à peu près suivant l'importance du rôle qu'y jouent les mathématiques.

Un de nos géomètres les plus illustres se plaît à répéter que la géométrie est la première des sciences expérimentales. Il y a, en effet, à l'origine de la géométrie, un certain nombre de notions qui ont un caractère nettement expérimental : l'étendue, la distance, le solide, le déplacement du solide, la ligne droite; ces notions sont si simples, nous en avons une si longue habitude, elles nous paraissent si claires qu'il peut sembler légitime de les regarder comme aussi primitives que la notion du nombre entier, et de regarder dès lors la géométrie comme faisant partie des mathématiques pures, au même titre que l'arithmétique, l'algèbre ou l'analyse. C'est d'ailleurs ce que l'on a fait longtemps : historiquement, la géométrie semble s'être développée plus rapidement que la pure science du nombre, et cette dernière même n'a pris tout son essor qu'après l'invention de la géométrie analytique, qui a relié l'algèbre à la géométrie. Il ne peut venir à l'esprit de personne de contester les services que la géométrie a rendus à l'analyse, dont les développements, sans la géométrie, auraient été impossibles en fait, mais non en théorie. Toutefois, quand on reste dans le domaine de la pure géométrie, il est très difficile de démêler nettement les notions qui sont à

l'origine, de discerner celles qui sont indispensables, irréductibles les unes aux autres. Que d'un autre côté, la géométrie puisse être constituée avec la seule notion du nombre, indépendamment de la notion d'espace, c'est ce qui est aujourd'hui hors de doute : il suffit d'appeler *point* un système de trois nombres quelconques, et de définir les éléments géométriques, la distance en particulier, par des opérations analytiques à effectuer sur des systèmes de trois nombres : on constituera ainsi un chapitre de l'analyse, relatif à des systèmes de trois variables, où le langage sera exactement celui de la géométrie et où se retrouveront tous les théorèmes de la science de l'espace. Il va sans dire que les définitions auront dû être choisies de manière à satisfaire à des conditions qu'impose l'expérience : c'est la définition de la distance et la condition que le déplacement d'un solide soit possible qui formera le nœud de cette algèbre géométrique, que je n'ai nullement la prétention de développer ici. Mais le lecteur comprendra de lui-même que cette façon de procéder qui, au premier abord, semble très artificielle, permet de distinguer nettement, par cela même qu'on ne fait appel à aucune intuition, les hypothèses fondamentales de la géométrie, c'est-à-dire les restrictions particulières qu'il faut faire pour extraire de la théorie analytique des systèmes de trois variables cette science spéciale qui est la géométrie à trois dimensions. Un autre point a été mis ainsi en évidence, c'est que, outre les restrictions qu'il faut, de toute nécessité, faire au début pour constituer une science qui corresponde à la géométrie, il fallait en faire une plus particulière pour

retrouver la théorie des parallèles, et ainsi est apparu clairement le véritable caractère du postulatum d'Euclide, caractère que les purs géomètres avaient d'ailleurs commencé d'éclaircir : en d'autres termes on peut concevoir diverses géométries, dont la géométrie dite euclidienne, celle à laquelle nous sommes habitués et qui conserve la théorie ordinaire des parallèles, n'est qu'un cas particulier. Ici encore, comme on l'a montré, la question de savoir si l'une est plus vraie que l'autre ne se pose pas[1] : elles sont équivalentes en ce sens qu'on peut passer de l'une à l'autre, traduire l'une dans l'autre, et il n'y aurait lieu, pour l'étude du monde extérieur, de rejeter la géométrie euclidienne, que s'il devait en résulter quelque importante simplification. On conçoit aussi qu'on puisse construire une géométrie à quatre dimensions, en considérant quatre variables au lieu de trois et en introduisant, dans l'étude des systèmes de quatre variables, des restrictions et des définitions analogues à celles que l'on a été amené à poser au début de la géométrie à trois dimensions ; on peut constituer ainsi un chapitre d'algèbre qui n'est pas sans intérêt. Si l'on veut, on admettra qu'il correspond à quelque réalité que, à la vérité, nous sommes incapables d'imaginer, mais qui est logiquement possible. Certains physiciens, dont le génie ne connaît pas la timidité, s'essaient déjà à tirer parti de cette conception pour la représentation du monde extérieur; mais il est bien permis de n'y voir encore qu'un chapitre de pure algèbre.

1. Voir dans la *Revue générale des Sciences* (décembre 1891), un article de M. Poincaré sur les *Géométries non euclidiennes*.

Au reste, on pourra multiplier les dimensions autant qu'on voudra.

La géométrie étant ainsi réduite à n'être qu'un chapitre de la science du nombre, il est clair que, si l'on fait maintenant correspondre, à un objet quelconque, un symbole purement géométrique, cela reviendra à lui faire correspondre une combinaison numérique.

Dans la cinématique, ou étude géométrique du mouvement, s'introduit une variable numérique qui ne joue pas le même rôle que les variables qui servent à fixer les points de l'espace, je veux parler du *temps* : mais tant qu'on n'aborde pas les applications de la mécanique, la nature de cette variable est entièrement indéterminée, sauf la condition de varier toujours dans le même sens. C'est là le caractère, primordial en quelque sorte, que nous ne pouvons enlever au temps : il s'écoule toujours dans le même sens, il ne retourne jamais en arrière : d'une façon précise, si l'on considère trois événements, et si le second est postérieur au premier, le troisième au second, nous sommes forcés de concevoir le troisième comme étant postérieur au premier. Cette notion est si primitive que plusieurs philosophes et plusieurs mathématiciens (non des moindres), soutiennent que l'idée de nombre est liée d'une façon indissoluble à l idée de cette succession dans le temps.

Dans la mécanique rationnelle, la notion de matière n'intervient que par des propriétés géométriques, et par un nombre à signification particulière, la *masse*, que l'on suppose attaché à chaque particule matérielle, qui la suit dans tous ses mouvements ; je reviendrai tout à l'heure sur

la détermination de ce nombre. Dans la définition des *forces*, que l'on considère aussi en mécanique, il n'entre rien d'autre que la masse, le temps et des éléments géométriques. En dehors de ses applications, la mécanique rationnelle peut être, elle aussi, regardée comme un chapitre spécial de la science du nombre, comme l'étude d'un certain système d'équations différentielles. Plus particulièrement encore, la mécanique céleste traite des cas où les forces que l'on considère obéissent à la loi de Newton; elle a affaire à un système d'équations différentielles plus particulier.

Si l'on veut appliquer ces sciences à la réalité, le temps ne pourra plus être une variable quelconque, ce sera une variable déterminée, qu'il faudra évaluer sur une *pendule* déterminée ; de même les masses ne seront plus des nombres quelconques, mais des nombres déterminés qu'il faut aussi évaluer.

Théoriquement, on pourrait mesurer le temps avec n'importe quelle pendule, pourvu que les aiguilles marchassent toujours dans le même sens : ayant choisi cette pendule, on dira que deux intervalles de temps sont égaux quand, pendant ces intervalles, l'aiguille aura tourné d'un même angle ; par définition, le mouvement de l'aiguille sur cette pendule sera dit uniforme. Une autre pendule réglée différemment marquera un autre temps ; des durées qui, évaluées sur la première pendule, étaient égales, ne le seraient plus si on les évaluait de même avec la seconde : peu importe, si l'on sait, à chaque instant, les deux nombres que marquent les deux pendules, si, connaissant l'un de ces nombres on peut en

déduire l'autre, soit au moyen d'un tableau convenablement dressé, soit au moyen d'une formule; on aura alors tous les éléments nécessaires pour faire ce que l'on appelle en mathématiques un changement de variable. Mais il arrive[1] que ce changement de variable modifie profondément les équations de la mécanique ; si elles étaient simples avec la première variable, elles seront compliquées avec la seconde. Ces équations acquièrent toute leur simplicité, quand on fait choix d'une pendule spéciale, la pendule sidérale, réglée sur le mouvement apparent des étoiles, ou, si l'on veut, sur le mouvement de la Terre. Pour passer de l'heure marquée par la pendule sidérale, à celle que marquent nos pendules ordinaires, il n'y a d'ailleurs qu'un changement insignifiant à faire, insignifiant parce qu'il n'altère pas l'*égalité ;* deux durées qui sont égales quand on les évalue avec une pendule sidérale, sont encore égales quand on les évalue avec une pendule ordinaire, qui marque ce que l'on appelle le temps moyen. Il n'en serait plus de même si l'on se servait d'une pendule réglée sur le mouvement apparent du Soleil : les lois de la mécanique, simples avec la pendule sidérale, se compliqueraient singulièrement avec la pendule solaire : c'est cette simplicité qui a déterminé le choix.

Comment est-on arrivé à la reconnaître ? Par de nombreuses observations dont quelques-unes sont très vulgaires. Nous sommes habitués à la répétition d'une foule de phénomènes qui se

1. Voir l'*Étude critique sur la mécanique* de M. Calinon (voir plus bas, p. 121).

ressemblent tellement, que nous les regardons presque comme identiques ; il est commode de dire qu'ils demandent le même temps pour s'accomplir ; cela signifie, au fond, qu'on suppose l'existence d'une pendule marchant de telle façon qu'elle marquerait toujours des temps égaux pour la durée de ces phénomènes.

Voici un sablier ; j'admets bien volontiers qu'il mettra le même temps à se vider, aujourd'hui ou demain, dans cette chambre ou dans cette autre ; de même pour une foule de phénomènes physiques. Cette habitude est si familière qu'on a prétendu trouver là une définition de l'égalité de deux durées : deux durées sont égales, dit-on, si pendant chacune d'elles, s'accomplissent deux phénomènes identiques. Cette proposition, prise comme définition, contient un non-sens, ou tout au moins un cercle vicieux : tout d'abord, il n'y a pas, à proprement parler, deux phénomènes identiques ; s'ils sont *deux*, si on les distingue, c'est qu'ils diffèrent par quelque chose ; pourquoi ne différeraient-ils pas par leurs durées ? Ce qui caractérise un phénomène, c'est, comme l'on dit, les circonstances de ce phénomène, et la durée du phénomène est une de ces circonstances ; pourquoi l'isoler des autres ? Veut-on dire que si toutes les circonstances de deux phénomènes, autres que la durée, sont les mêmes, les durées aussi seront les mêmes ? On aurait grand peine à trouver de pareils phénomènes ; et la définition, ainsi comprise, serait peu applicable ; c'est sans doute *quelques* circonstances qu'on veut dire ; lesquelles ? Le soleil se lève et se couche tous les jours ; deux jours solaires sont des phénomènes assez pareils, pourquoi ne regardez-vous pas leurs

durées comme égales? Mais cette proposition, dont on ne peut, sans cercle vicieux, tirer une définition, n'en conserve pas moins quelque valeur pratique : il y a des phénomènes qui se ressemblent beaucoup, dont on est habitué de dire qu'ils se répètent ; ils sont en très grand nombre et, d'ordinaire, cette supposition simple qu'ils s'effectuent pendant le même temps s'accorde avec elle-même : au lieu d'un sablier, prenez-en deux ; vous avez observé, par exemple, qu'ils mettaient le même temps à se vider ; recommencez l'expérience ; vous les avez retournés au même instant et c'est au même instant qu'ils seront vides ; cette observation — ou d'autres analogues — vous est si familière, que vous dédaignerez de recommencer l'expérience. Les expériences de cette nature, et d'autres, infiniment plus délicates, sont entièrement d'accord avec la définition qui veut que deux intervalles de temps soient égaux, si pendant chacun des deux intervalles, la Terre a tourné autour de son axe d'un même angle, angle que l'astronomie nous permet d'observer ; et c'est, finalement, à cette définition qu'il convient de s'arrêter : c'est elle qui permet de réaliser l'accord le plus complet et le plus simple entre les théories mécaniques et les faits, même de faire rentrer sous des lois simples l'inégalité des jours solaires, comme aussi cette égalité de durée que l'habitude nous force à attribuer à ces phénomènes qui ne font, pour ainsi dire, que se répéter. Il y a des raisons, tirées de la mécanique même, pour croire que si on l'appliquait à des périodes extrêmement longues, extraordinairement plus longues que celles que l'observation nous permet de considérer, cette définition ne permettrait plus de

conserver aux équations de la mécanique leur forme simple; c'est elle, non les équations, qu'il conviendrait de changer, si la science embrassait un jour des périodes aussi considérables.

La masse d'un corps, c'est le nombre que l'on mesure avec la balance, et que dans le langage courant, on appelle son *poids*. Si je pèse un corps avec une balance, que je le pèse ici ou là, à Paris ou à Marseille, dans le fond d'une vallée ou sur le haut d'une montagne, je trouverai toujours le même poids; si ce corps est, par exemple, une certaine quantité d'eau, contenue dans un vase clos, si je chauffe cette eau pour la réduire en vapeur, et si je pèse cette vapeur, je trouverai toujours le même nombre, qui se retrouverait encore d'ailleurs après des transformations bien autrement complexes que celles que je viens de décrire. C'est là un fait d'expérience qui concorde avec la définition de la matière de la mécanique rationnelle par un nombre fixe attaché à chacune de ses particules. Que, en réalité, on puisse mesurer, au moyen de certaines expériences précises, un nombre qui reste fixe pour chaque partie de matière, c'est le principe de la conservation de la masse.

Ce même corps, que l'on pesait tout à l'heure avec une balance, il suffirait de monter du fond de la vallée sur le sommet de la montagne, d'aller un peu loin vers le nord ou vers le sud pour voir son poids changer, si, au lieu d'une balance, on se servait d'un *peson* très sensible. Comment soutenir, après cela, que le principe de la conservation de la masse ait en lui quelque évidence métaphysique, qui doit le faire admettre *a priori*, et qu'il exprime l'indestructibilité

de la matière, l'impossibilité que le néant devienne de l'être, ou que l'être retourne au néant? Qu'il y ait des penseurs à soutenir cette opinion, cela étonne. Mais pourquoi donc est-ce ce nombre mesuré de cette façon, plutôt qu'un autre nombre, que l'on mesurerait autrement, qui reste constant? Qu'est-ce qui peut justifier *a priori* l'emploi de la balance plutôt que celui du peson? Et même avec la balance que de précautions ne faut-il pas prendre? Entrez dans un laboratoire et regardez le physicien qui fait une pesée délicate, dans le vide, qui observe patiemment les lentes oscillations d'une aiguille portée par un instrument dont la complication vous émerveille; ne bougez pas, vous agiteriez l'air de la chambre, vous feriez trembler le parquet, vous dérangeriez l'instrument, vous changeriez le nombre que le physicien guette et vous risqueriez de lui faire faire une expérience où le principe de la conservation de la masse se trouverait en défaut. Sans doute le physicien saura vous rendre compte de toutes les précautions qu'il prend, mais ses explications sont liées elles-mêmes à une infinité d'expériences délicates qui n'ont rien à faire avec l'évidence *a priori*. Des expériences grossières, faites avec des appareils imparfaits, ont donné d'abord l'idée de l'invariabilité de la masse : elles permettaient seulement d'affirmer que la masse variait très peu, mais comme il n'y a pas de loi mathématique plus simple que celle de la constance d'un nombre, c'est à celle-là qu'on s'est arrêté, et quand elle s'est trouvée en défaut, au lieu d'admettre la variation de la masse, au lieu d'admettre en particulier qu'elle dépend de la température ou de

la pression atmosphérique, on s'est ingénié à réaliser des conditions d'expériences où la constance de la masse fût conservée : Regarder la masse comme constante est la meilleure hypothèse, parce qu'elle nous permet la représentation la plus simple de l'univers : mais, logiquement, d'autres hypothèses, qui ne feraient que compliquer les calculs, seraient tout aussi légitimes. Et, pour en finir avec ce sujet, que dire de ceux qui prétendent justifier *a priori* le principe de la conservation de l'énergie? Il suffit de penser à la complication des équations par lesquelles ce principe s'exprime pour sourire à l'idée d'une justification métaphysique. On vous dira peut-être : J'ignore si c'est ce que vous appelez la masse et ce que vous appelez l'énergie qui reste constant, mais je sais qu'il y a quelque chose qui reste constant, je sais qu'il y a des *lois ;* et cela me suffit. La prétention alors est plus modeste, si modeste qu'elle en est insignifiante ; qu'est-ce que dire que quelque chose est constant, si l'on ne sait quoi?

Et pourquoi serait-il si clair que rien ne se perd et que rien ne se crée? Tout changement n'est-il pas la destruction de ce qui était et la création de ce qui va être ?

Ce n'est pas avec des balances que l'astronome pèse les masses auxquelles il a affaire. S'il connaissait exactement certains nombres, parmi lesquels les masses du soleil et des planètes figurent au premier rang, les formules de la mécanique céleste, en admettant la parfaite rigueur, lui permettraient de calculer, avec une approximation indéfinie, la position de ces astres, n'importe à quel moment. Il s'ingénie, au moyen de ces

formules, à définir d'autres nombres, accessibles à l'observation, et qui lui permettent de déterminer ceux qu'il cherche. Les nombres fournis par l'observation ne sont jamais qu'approchés : il en est de même des nombres que l'astronome en déduira, par de longs calculs : aussi ne peut-il être question d'une approximation indéfinie dans les conséquences, et les périodes pendant lesquelles les formules de l'astronomie, réduites en nombres, représentent le mouvement des astres avec une exactitude suffisante sont-elles nécessairement limitées.

Dans les parties de la physique qui ont un caractère nettement mathématique, dans les théories, par exemple, de la thermodynamique, de l'électricité, de la lumière, le procédé est toujours le même : arriver à des définitions purement mathématiques, que l'on substitue aux choses, et qui en permettent une représentation suffisamment simple. Ces définitions sont suggérées par de longues réflexions sur les résultats de l'expérience, par des idées préconçues qu'a fait naître l'organisation antérieure de la science ; grâce à elles, toute une classe de phénomènes se trouve remplacée par une courte formule et débarrassée de l'infinité des autres phénomènes qui s'y mêlent dans la réalité ; cette simplification est essentielle. Que ferait le géomètre, s'il voulait penser, en même temps qu'à ses formes abstraites, à la couleur des corps, à leur matière, aux actions et aux réactions physiques, chimiques ou vitales qui s'y passent, à l'univers entier, qui est dans chacune de ses parties ? Non, il écarte tout cela de sa pensée, pour n'y retenir que des définitions. Il faut que le physicien

procède de même, mais dans un monde bien autrement complexe ; il ne se meut pas librement dans le pur espace et n'y joue pas avec les symboles qu'il s'amuse à créer. Les choses le serrent, le pressent de tous côtés ; que négligera-t-il, que gardera-t-il dans sa pensée? Il me semble que les difficultés mathématiques ne sont rien devant le choix de ces définitions qui sont l'essence des théories physiques, qui permettent de mettre en équation les problèmes réels, et que l'on ne saurait trop admirer les physiciens et les géomètres qui y ont réussi les premiers.

Dans les sciences expérimentales et surtout dans celles qui traitent de phénomènes relativement simples, les mathématiques jouent encore un rôle, mais plus modeste ; elles permettent un commencement d'organisation en formulant des lois empiriques qui traduisent une correspondance entre des tableaux de nombres obtenus par des mesures expérimentales. Ces lois n'ajoutent aux tableaux de nombres que la supposition d'une certaine continuité dans la variation des phénomènes, supposition qui se retrouve expressément dans presque toutes les parties des sciences physiques. Quoique l'habitude de cette continuité l'ait fait ériger en principe *a priori*, rien n'oblige à croire qu'elle soit essentiellement au fond des choses ; il nous est simplement commode de la supposer, et il n'y a à cela nul inconvénient, si les discontinuités sont trop petites pour que nous les observions. On cherche à simplifier l'expression de ces lois empiriques, de manière toutefois que l'erreur qui résulte de leur application soit du même ordre que les erreurs que comportent nécessairement les instruments de mesure

avec lesquels on a obtenu les nombres dont ces lois expriment la correspondance : les diverses expressions qui satisfont à cette condition sont aussi bonnes l'une que l'autre, et l'on choisit la plus simple. Les limites entre lesquelles on peut ainsi simplifier l'expression des lois empiriques sont d'autant plus amples et permettent d'obtenir des expressions d'autant plus simples que les instruments de mesure sont plus grossiers. Aussi l'imperfection de nos sens et des premiers instruments de mesure a-t-elle joué un rôle utile dans la constitution de la science empirique en conduisant à des énoncés très simples, ne représentant sans doute les choses qu'avec une approximation très grossière ; mais ces lois d'une simplicité encourageante conduisaient à un premier groupement des phénomènes et permettaient d'orienter les recherches ultérieures. En perfectionnant les procédés de mesure, il a fallu, peu à peu, compliquer les lois empiriques ; si complexes qu'elles soient, elles sont infiniment plus simples que les phénomènes qu'elles représentent, dont elles sont les signes, et fournissent à la réflexion scientifique une matière qui lui est mieux appropriée ; parfois une vue de génie vient les grouper, les rattacher à quelque heureuse définition, et les fait pénétrer, sous une forme meilleure, dans la science théorique. Au reste, il importe d'observer que cette dernière science, lors même qu'elle est le mieux organisée, comme la mécanique céleste, et qu'elle ne comporte plus, en dehors de ses définitions, qu'une chaîne rigoureuse de déductions mathématiques, ne peut jamais se passer de l'expérience ; si elle veut être une représentation du réel, ce n'est pas à

des nombres arbitraires, mais à des nombres particuliers qu'elle s'applique ; la science théorique aura toujours besoin de données expérimentales ; ces données seront toujours imparfaites, puisqu'elles résulteront toujours de mesures ; jamais la tâche de l'expérimentateur ne sera terminée ; il lui faudra toujours s'ingénier pour trouver de nouveaux nombres, moins inexacts que ceux qu'avaient obtenus ses prédécesseurs.

Qu'il s'agisse donc de la géométrie, de la mécanique, de l'astronomie, de la physique mathématique, c'est toujours un chapitre spécial de la science des nombres qui porte le nom d'un chapitre de la science du réel. Mieux une science est constituée, plus il apparaît nettement qu'elle est une science de signes : ses définitions une fois admises, elle n'est plus qu'une suite de déductions logiques, entièrement nécessaires ; mais il ne faut pas oublier que cette nécessité logique qui y règne en maîtresse ne concerne que les signes ; rien n'autorise à la transporter dans les choses, en lui conservant le même caractère[1]. Le rôle que jouent les mathématiques dans ces sciences ne doit pas faire illusion : sans doute, les déductions mathématiques sont d'une entière rigueur, mais à condition que l'on reste dans les mathématiques ; tant que l'on y reste, on ne peut contester les conclusions, à moins de contester la raison elle-même : si vous faites tels calculs sur tels nombres, vous trouverez tel résultat ; voilà, encore une fois, ce qu'affirment les mathématiques, ce qui est d'une nécessité logique ; elles ne peuvent

1. Il est sans doute inutile de rappeler ici la thèse de M. Boutroux : *Sur la contingence des lois de la nature.*

rien affirmer au delà : elles ne peuvent affirmer l'accord entre les résultats d'un calcul, et les résultats d'une expérience ; cet accord est un fait, et il n'a pas, il ne peut pas avoir d'autre importance qu'un fait, répété autant de fois qu'on le voudra. Que l'on dise, si l'on veut, que cet accord nous révèle la nécessité qui est au fond des choses, et qui en règle le cours, c'est une croyance comme une autre, et personne assurément ne cherchera dans la science des raisons pour l'infirmer ; mais personne non plus n'a le droit de vouloir l'imposer au nom de la science : il faut s'entendre sur cet accord, admirable à coup sûr, entre les résultats de la théorie et ceux de l'expérience : encore une fois, il n'est qu'approché, et il ne peut être qu'approché, puisqu'une mesure ne peut être qu'approchée ; pour le physicien, il est parfait lorsque la différence entre les résultats de la théorie et de l'expérience n'est pas plus grande que les erreurs que comportent l'expérience. Dès lors, ce qu'il convient d'induire de l'accord entre la théorie et l'expérience, c'est que les phénomènes sont déterminés par les lois théoriques, *entre certaines limites*, entre des limites que nous connaissons, si nous connaissons les instruments de mesure : encore n'y a-t-il là qu'une induction. La valeur de cette induction ne peut être contestée, mais il ne faut pas la pousser trop loin, et l'on dépasserait infiniment les bornes entre lesquelles elle est légitime, si l'on affirmait que l'accord entre la théorie et l'expérience doit se poursuivre indéfiniment.

En résumé, il y a quelques classes de phénomènes particulièrement simples, et que nous simplifions encore de parti pris, dont nous pou-

vons trouver une représentation approchée. mais pleinement intelligible et logiquement enchaînée, dans certains chapitres de la science des nombres, constitués exprès. C'est là un fait admirable, et qui est plein de promesses ; que cette représentation puisse devenir bien plus approchée, qu'elle puisse s'étendre à bien d'autres classes de phénomènes, et bien autrement complexes que ceux qui ont pu être étudiés jusqu'ici, c'est ce qu'il est assurément légitime d'espérer et même d'affirmer. Mais si l'on tient à croire que ce progrès ne peut être indéfini, et qu'il est des phénomènes dont aucune science n'est possible, on reste libre de garder cette opinion, et l'on pourra toujours la défendre, en reculant, s'il le faut, pied à pied; car, de l'infinité des phénomènes, la science n'aura jamais étudié qu'un fragment infime, et ne l'aura étudié qu'imparfaitement ; il y aura toujours, et tant qu'on voudra, des phénomènes si éloignés, si complexes ou si petits que la science n'aura aucune prise sur eux.

Qu'on me permette d'entrer un peu dans le domaine du rêve, et d'imaginer, au contraire de ce que je viens de dire, que ce progrès soit possible et soit réalisé, et qu'un homme, analogue à nous, mais nous dépassant infiniment par son intelligence, soit capable de contenir une science équivalente à la réalité extérieure, en ce sens que tous les phénomènes répondent pour lui à des transformations numériques dont il ait la claire compréhension ; si la grandeur de son intelligence laissait place chez lui à quelqu'une de ces inquiétudes que nous cultivons sous le nom de philosophie, peut-être trouverait-il le moyen d'être encore mécontent et de se dire que la science des nombres

n'est qu'une abstraction, qu'elle correspond parfaitement aux choses, mais qu'elle ne les explique pas, qu'elle s'explique seulement elle-même, et qu'elle ne répond pas même à cette question : pourquoi, dans le domaine infini des transformations numériques que ma pensée peut saisir, est-ce celles-ci, plutôt que celles-là, qui correspondent à la réalité et pourquoi les nombres au moyen desquels je désigne et reconnais les choses correspondent-ils aux sensations que j'éprouve plutôt qu'à d'autres?

Quoi qu'il en soit, la conception purement arithmétique de la science du monde extérieur me semble offrir au moins un avantage, c'est qu'il est difficile d'en être dupe; personne, sans doute, ne s'imaginera que le monde extérieur n'est rien autre chose qu'une suite d'opérations d'arithmétique. C'est, je crois, le plaisir de se laisser duper, qui fait qu'on s'arrête habituellement à une conception intermédiaire, à la conception mécanique. On s'en va répétant que nos sensations ne sont qu'en nous, qu'il ne faut pas, comme nous faisons, en remplir l'univers, où il n'y a ni couleur, ni bruit, où il n'y a que du mouvement ; le mouvement, dit-on, est la seule réalité extérieure ; à elle seule, par ses variétés, elle explique tout, et l'on se complaît à imaginer de petits points qui circulent dans l'espace, qui tournent les uns autour des autres. Les services qu'a rendus et que rendra encore cette conception ne sont pas contestables; il n'est pas question de s'en priver, pas plus qu'aucun savant, si persuadé qu'il soit de la subjectivité de ses sensations, n'est disposé pour cela à se passer de ces sensations, à se crever les yeux et à se boucher les oreilles; mais, prise en

elle-même, je ne vois pas que cette conception soit bien intelligible et que l'on gagne grand chose à conserver, pour n'attribuer de réalité objective qu'à elle seule, cette dernière et vague intuition du mouvement.

Si l'on veut qu'il n'y ait, en dehors de nous, ni bleu ni rouge, pourquoi veut-on qu'il y ait du mouvement? Le mouvement de quoi? De la matière? Mais je ne puis imaginer la matière qu'avec des propriétés, et c'est justement ces propriétés que vous prétendez réduire au mouvement; si elle n'a plus de propriétés, je ne distingue plus la matière de la pure étendue, et l'étendue elle-même s'évanouit de ma pensée, si j'essaie d'abolir le souvenir de mes sensations, de ces sensations de lumière et de toucher dont elle est inséparable. La lumière n'est qu'un mouvement, soit; comment imaginerai-je cette étendue obscure où il s'effectue, comment distinguerai-je les particules qui se meuvent? Et si l'on me dit que ces particules ne peuvent se pénétrer, qu'entendrai-je par là, puisque je ne les distingue pas de ce qui n'est pas elles? Vous me rendez aveugle, vous abolissez en moi le sens du toucher, et vous prétendez me faire spéculer sur des intuitions que je ne puis avoir! Eh bien! même alors, la succession de mes états de conscience me laisse l'idée de nombre et me permet de reconstruire la longue et multiple série des déductions qu'elle contient en elle; parmi ces déductions infinies, on en choisit quelques-unes et l'on me dit qu'elles correspondent à quelque chose qui n'est pas moi, à des possibilités d'autres états de conscience; on ne me dit rien qui soit inintelligible; et, si vous me rendez la vue, l'ouïe et le toucher, si je

reconnais que les sensations qui m'envahissent correspondent à cette science des nombres que j'avais déjà, je ne m'imaginerai pas que le monde extérieur soit cette science, je saurai bien qu'elle n'est qu'un signe ; je ne mépriserai pas ce signe ; je serai comme un homme qui, tout d'un coup, aurait appris la musique : j'avais lu et relu cette partition ; j'avais eu la patience de voir, à chaque ligne, de quelle note chaque note était suivie ; maintenant que j'ai appris la musique, la partition me paraît tout autrement admirable : en la feuilletant, j'entends chanter les violons, gémir la flûte ou le hautbois, gronder les cuivres.



CHAPITRE III

L'ADAPTATION DE LA PENSÉE

A Monsieur Félix Le Dantec.

MON CHER AMI,

Vous savez quel plaisir j'ai à vous lire ; vous êtes de ces rares amis dont la parole imprimée évoque chez moi le souvenir des intonations familières. En vous lisant, je vous écoute. Si vos opinions me troublent et me choquent parfois, elles ne me fâchent point ; et, comment le feraient-elles ? Ne résultent-elles point d'un enchaînement de causes auquel personne ne peut rien, vous moins qu'un autre, tant vous êtes sûr que cet enchaînement est nécessaire ? Et puis la belle franchise, la belle clarté avec lesquelles vous les exprimez y mettent une apparence de joie, dont il est peut-être sage de se contenter.

Je me suis souvent demandé comment vous, qui professez que nous ne connaissons pas les choses, mais seulement notre propre conscience et les modifications qu'y apporte le monde extérieur, vous pouviez vous plaire à rabaisser la pensée, à la regarder comme quelque « épiphénomène » sans importance, dont la suppression n'apporterait pas grand changement dans l'Univers. Je n'ai pas besoin de vous dire que j'ai, sur la rela-

tivité de nos connaissances, la même opinion que vous : même, je m'étonne de ceux qui sont capables de comprendre cette doctrine, sans que son évidence les pénètre tout de suite : elle m'incline à regarder la pensée comme très essentielle.

Je vous fais grâce d'un développement sur cet Univers, où ne brillerait aucun soleil, où la mer et le vent ne mugiraient pas, et qui serait comme s'il n'était pas. Vous n'aurez point de peine à faire philosopher M. de la Palisse sur ce beau sujet, qui prête à l'éloquence. Mais, si je ne connais que ma pensée, ma pensée seule peut m'intéresser : cela me chagrine qu'on la rapetisse, et qu'on la traite d'épiphénomène. J'ai désiré souvent causer avec vous de ce chagrin : les vacances passées ensemble « au fond d'un golfe plein d'îlots » ne se sont pas retrouvées. Comme elles sont loin et près ! N'y a-t-il pas vingt ans ?

Ah ! les longues et belles causeries que nous avons eues, couchés sur l'herbe dans un repli de la falaise, humant les bonnes senteurs de la mer, regardant courir les nuages, souriant à nos idées qui courent aussi et cherchent à se rattraper ! Mais ne croyez pas que ces vacances-là soient les seules que j'aie passées avec vous ; j'avais vos livres, qui sont pour moi des livres de vacances : les voici, tout salis de coups de crayon, de notes marginales que j'ai parfois grand'peine à relire, ou bourrés de petits papiers ; je ne veux pas les rouvrir : je m'y plongerais de nouveau, j'y griffonnerais de nouvelles notes, et je renverrais à je ne sais quand cette lettre que je vous ai promise. Oui, j'ai beaucoup causé avec vous, silencieusement. Voici que j'ai fermé votre livre pour me promener ; j'entame la conversation en grimpant

quelque sentier ; je la continue, assis sur une pierre ; j'attends avec vous la minute glorieuse pour laquelle je suis venu jusqu'ici : le soleil a disparu derrière les cimes de l'ouest ; dans un instant, très haut dans le ciel, bien au-dessus des nuages qui se traînent sur les montagnes violettes, ses rayons vont faire surgir le glacier que je surveille et qui resplendira dans la lumière. Lorsque la gloire s'est éteinte, et que les neiges lointaines sont devenues tristes et livides, je reprends la causerie, tout en dévalant rapidement sur la route, pour me réchauffer et ne pas arriver en retard au dîner de famille, dont le menu commence à préoccuper mon estomac vide.

Votre livre sur les *Lois naturelles* m'a un peu expliqué ce qui m'étonnait dans votre opinion : « Il ne faut pas, dites-vous, nous faire illusion sur notre pensée et notre science : elles sont à notre taille. » Je le veux bien ; mais je ne sais pas trop où je commence et où je finis, et si je n'embrasse pas tout ce que je pense. Me voilà bien grandi, et je grandis en pensant et en sachant davantage. Au fait, j'ai lu récemment, à la quatrième page d'un journal, qu'on pouvait acquérir encore quelques centimètres, même après cinquante ans ; ils sont bien passés.

Vous avez pris pour épigraphe une « matière de bréviaire » que vous avez traduite assez librement : *souviens-toi que tu es dans la nature.* Cela, je ne l'ai pas oublié, mais je crois aussi que la nature est en moi. Il m'a paru qu'en nous rappelant le milieu où nous sommes plongés, vous nous distinguiez trop de ce milieu ; il n'y a pas le milieu et nous, mais ce qui est, que nous pensons et qui pense par nous. Donc, sur ce point,

je suis, s'il est possible, de votre avis, plus que vous-même. Encore ne suis-je pas sûr que mon reproche soit juste, car, malgré mes efforts, sûrement, j'encourrai moi-même ce reproche que je vous adresse, tant il est impossible de parler sans faire cette distinction que je blâme.

Vous avez une manière que je goûte fort, de présenter nos titres de noblesse, que vous retrouvez dans la longue série de nos ancêtres. Tous ces ancêtres, hommes, animaux supérieurs ou inférieurs, jusqu'à ces êtres où la vie se distingue à peine, tous, mâles et femelles, et ceux-mêmes, s'il y en a eu, qui appartenaient à votre troisième sexe, ont eu ce mérite singulier *de vivre*, dont Siéyès s'est fait jadis un titre de gloire ; et ce n'est pas un mince mérite, car ils ont assurément traversé des périodes plus difficiles encore que n'a fait Siéyès : ils ont su vivre au moins jusqu'à l'âge où ils se sont reproduits. Nous avons, derrière nous, des millions d'années et, en nous, l'expérience de milliers de siècles. N'est-ce rien, cela, et ne nous consolerons-nous pas aisément, si nous n'arrivons pas à retrouver le nom de nos grands-parents d'avant-hier, de ceux qui vivaient au temps des croisades ? Tous ces êtres qui nous ont précédés étaient adaptés au milieu où ils vivaient, assez adaptés pour pouvoir vivre et se reproduire ; ils ont acquis les forces, les ruses, les armes nécessaires et nous ont transmis le trésor qu'ils avaient reçu et qu'ils ont grossi peu à peu. Ceux qui n'ont pas su prendre l'usage du monde (extérieur), qui n'ont pas su s'adapter aux choses, ont disparu sans laisser de traces ; ils n'ont point de descendants inquiets, qui philosophent et qui se posent des questions. Nous

sommes des élus : voilà de quoi nous rendre très précieux à nous-mêmes ; je pense avec satisfaction à cette lignée d'aïeux, et au mérite qu'ils se sont acquis en vivant. Je vais tâcher de les imiter encore un peu. J'accepte très bien votre façon d'exalter notre dignité.

Mais voici que vous rabattez mon orgueil. Qu'est-ce que tout cela prouve, sinon que nous sommes des êtres *possibles ?* Notre connaissance du monde extérieur n'a de valeur qu'une valeur pratique: elle nous aide à nous continuer ; notre longue expérience n'est que l'expérience de ce qui nous est utile ou nuisible ; seule, cette expérience-là a pu se répéter assez de fois pour nous modifier et nous instruire ; nos sens ont eu beau se spécialiser et s'affiner, ils ne pénètrent qu'une infime partie de la réalité, celle que nous avons besoin d'explorer, afin d'y vivre ; ils nous laissent ignorer tout ce qui n'est pas indispensable à notre continuation ; cette science, dont nous sommes si fiers, fondée sur une expérience pratique, construite avec nos sens, qui sont des instruments pratiques, n'a aucune valeur en tant que théorie.

J'aurai, là-dessus, bien des réserves à faire; j'en aurais davantage encore si je croyais fermement, comme vous, à une absolue connexion entre les phénomènes, puisque, alors, la connaissance d'une partie pourrait conduire à la connaissance du tout, et la connaissance de ce qui nous est utile à la connaissance du reste : mais, en passant, je veux me réjouir un instant avec vous du nombre et de la diversité de ceux qui prétendent n'accorder à la science qu'une valeur d'utilité : il y a vous, qui aimez passionnément cette science

et qui lui avez donné votre vie tout entière ; il y a ceux qui méprisent ce qui est utile aux autres, et qui versent des larmes sur la décadence des études désintéressées, dont ils ont vécu ; il y a encore les néo-positivistes, qui sont des gens distingués et savants dont je pense beaucoup de bien, mais qui ne seraient peut-être pas fâchés de ruiner la science au profit de ces raisons du cœur que la raison ne connaît pas. Cela m'amuse extraordinairement de vous voir dans cette compagnie. Mais laissons cela : je ne veux pas imiter ces députés qui, lorsqu'un collègue se lève à leur côté pour prononcer une parole de bon sens et de courage, ne trouvent pas d'autre réponse à lui faire que de montrer les adversaires qui l'applaudissent. Vous aimez trop la vérité, si vous aviez des ennemis, pour ne pas la reconnaître et l'aimer chez eux. Et, ni les néo-positivistes, ni les vieux professeurs qui continuent leur flirt avec l'antiquité, ne sont vos ennemis. Je me figure que vous n'en avez pas.

Voulez-vous que nous revenions à nos ancêtres ? Il y a bien longtemps que la pensée s'est éveillée chez eux, toute petite, chétive, obscure et tremblotante ; on ne sait comment ; elle s'est « frottée aux choses » ; il est assez étonnant que ce frottement contre les aspérités des choses, n'en ait point fait quelque galet informe, et qu'il ait su au contraire, en la détruisant sans pitié quand elle ne valait rien, réussir à la compliquer si singulièrement et à la rendre si diverse ; mais ne passons point le temps à nous émerveiller : nous n'en finirions pas. Les perfectionnements acquis ou réalisés par les individus se transmettent quelquefois à leurs descendants et

se fixent dans les espèces. Admettons-le. Les perfectionnements s'ajoutent, parce que les individus moins imparfaits ont plus de chances pour survivre. Je l'entends ainsi. Petit à petit, la mémoire consciente, l'adaptation des actes au but, le raisonnement, la raison apparaissent. Sans doute, ni vous, ni moi, nous n'avons nulle idée de la façon dont tout cela s'est fait ; mais, n'importe, il m'est commode d'imaginer que les choses se sont passées ainsi, et, pour en être persuadé, vous avez de meilleures raisons que moi, tirées de votre savoir. Pour moi, je me laisse prendre par la séduction des hypothèses que vous développez. Pourquoi me séduisent-elles ? A cause de la *manie de la continuité*, de cette maladie qu'Hermite, notre commun maître, dénonçait avec une vigueur si amusante, chez la plupart de ceux qui s'occupent de mathématiques, et qui ne s'attachent qu'aux fonctions continues ; vous vous rappelez qu'il rendait les mathématiciens responsables de tous les méfaits des naturalistes : c'est les mathématiciens qui ont commencé.

Dans ce long frottement que vous décrivez, du monde extérieur sur la pensée de nos ancêtres, dans ce travail où l'ouvrier (c'est le monde extérieur) rejette les échantillons imparfaits et parvient, à force de temps et d'essais manqués, à construire l'organisme compliqué qui est le nôtre, il me semble que vous négligez trop la pensée elle-même ; qu'est-elle pour avoir supporté ce merveilleux travail ? Sur quoi ce travail s'est-il exercé ? Il ne me suffit pas que vous appeliez épiphénomène ce je ne sais quoi : il est quelque chose. Lui aussi est dans la nature, il est

au moins une possibilité de ce qui est ; il est capable d'exister et de se manifester à sa façon, de s'adapter aux choses et d'y pénétrer ; s'il n'est pas distinct du monde extérieur, il en est une activité propre qui ne ressemble pas aux autres ; c'est cette activité propre que je ne vois nullement dans votre livre. Je ne vous demande pas de la définir ; tout ce que vous savez n'y suffirait pas. Je regrette que vous la teniez cachée, que la pensée, dans son développement, apparaisse toujours passive et ne se perfectionnant que par l'action de ce qui n'est pas elle : j'imagine qu'elle n'est pas pour rien dans son propre perfectionnement.

Les êtres vivants et pensant (tant soit peu), d'où nous sommes sortis, avaient au moins une propriété qui ressort de ce que vous dites : ils se reproduisaient dans des êtres qui gardaient quelque chose de leurs aïeux et qui en étaient différents ; une plus grande complication, un progrès, étaient possibles dans la descendance, puisque l'une et l'autre se sont produits. Eh ! bien ! Cette possibilité, cette puissance de variation et de progrès me paraissent au fond plus essentielles que le rôle négatif joué par le monde extérieur. Imaginons un monde (vous appellerez cela de l'imagination « verbale »), un monde où les causes de destruction n'agissent pas, mais où les êtres vivants ont cette propriété de se diversifier et de progresser dans leurs descendants, et de leur léguer les qualités acquises. Parmi les milliasses d'individus médiocres qui se produiront et se reproduiront, naîtront comme dans notre monde, des êtres supérieurs ; car enfin, pour être conséquent avec mon hypothèse, je ne

dois pas supposer que la supér orité de ces êtres-là soit une raison pour qu'ils soient éliminés et ne se reproduisent pas. Vous me direz que c'est en cherchant à échapper aux causes de destruction que les êtres vivants se perfectionnent : je le veux bien ; mais d'une part, cet effort est en eux, plus que dans la pression des causes destructives, et, d'autre part, si celles-ci ont pu accélérer le progrès, ce n'est pas elles, en tant que causes destructives, qui ont créé la variation : j'accumulerai les millions de siècles, si vous voulez ; vous autres messieurs, ne vous gênez pas là-dessus, j'ai le droit d'imaginer que le progrès finisse par se réaliser, que l'homme apparaisse, et même le surhomme.

Au fait, dans notre monde réel, ceux qui étaient capables de donner naissance au surhomme et à la surfemme ont peut-être disparu sans laisser de descendants. Vous savez que certaines supériorités, qui ne viennent pas à la bonne heure, sont funestes à ceux qui les possèdent. A ce sujet, des âmes tendres et distinguées ont versé beaucoup de larmes dans leurs encriers. Voir Alfred de Vigny et autres romantiques, *passim*. Ou peut-être les parents de ces ancêtres en puissance ont-ils accommodé l'un pour la chapelle Sixtine, ou enfermé l'autre dans un cloître ? Dans mon univers, où chacun vivrait et se reproduirait, l'ancêtre du surhomme aurait eu des enfants, qui auraient engendré de petits surhommes ; il y aurait aujourd'hui de grands surhommes qui mèneraient le monde ; mais que de sots à gouverner ! J'en suis épouvanté. Les bienfaisantes causes de destruction nous ont épargné les surhommes et une partie des imbéciles.

Ne vous fâchez pas : je vais essayer d'être sérieux. Vous admettez sans doute, chez les êtres vivants, la possibilité d'évoluer dans leurs descendants, d'évoluer en progressant; mais vous insistez sur le rôle bienfaisant des causes de destruction pour corriger les mauvais effets du hasard. S'il y a une tendance, de nature très inconnue, à la production de descendants qui diffèrent des parents, si les variations du milieu s'ajoutent à cette tendance à la différenciation, est-il donc si clair qu'elle doive s'exercer au hasard et produire toutes les diversités possibles, entre lesquelles les causes de destruction choisiront? Pourquoi êtes-vous sûr que ce n'est pas cette tendance elle-même qui choisit le sens dans lequel elle veut se développer?

Essayons de retracer quelques traits d'une histoire que nous ne savons ni l'un, ni l'autre. Vous avez trop conscience de notre double ignorance pour ne pas excuser les pauvretés que je dirai : Si vous voulez être très indulgent, vous tiendrez compte de la difficulté que vous avez si bien mise en lumière (et que je sentais fortement en écrivant ma dernière phrase), de la nécessité de se servir du langage *humain*, où nous nous sentons empêtrés quand nous essayons de nous dégager du réalisme naïf qui a présidé à sa formation.

Commençons par la sensation : c'est bien avant le déluge. Où apparaît-elle dans la série animale? En avez-vous saisi la trace dans les êtres inférieurs que vous vous plaisez à étudier? Pour qu'elle aboutisse à la mémoire, sans laquelle un commencement de conscience est impossible, il faut que l'être vivant qui a éprouvé une sensation ait été modifié par cette sensation, qu'il ne

soit plus le même qu'avant de l'avoir éprouvée, que cette modification lui permette de reconnaître une sensation déjà éprouvée et qu'un lien, une certaine unité, s'établissent entre les sensations successives.

L'individu se distingue, ou croit se distinguer, de ce qui n'est pas lui; il coordonne ses sensations et ses mouvements, il devient capable de reconnaître et de saisir une proie, de s'assimiler ce qui n'est pas lui. Non seulement la mémoire s'est créée, la mémoire consciente, mais aussi l'habitude, qui est comme une mémoire inconsciente. Et cette habitude a pénétré et modifié si profondément l'être vivant qu'elle se transmet à ses descendants : ceux-ci retrouveront rapidement ce que savait l'ancêtre et ils l'accroîtront quelquefois. Pourquoi voulez-vous que la pensée elle-même ne soit pour rien dans tout ce travail, que vous sentez bien que je suis incapable d'analyser, mais où je soupçonne une prodigieuse activité, une activité toute différente de ce que je connais des phénomènes mécaniques ou physico-chimiques? Je ne dis pas que ce travail soit indépendant de ces phénomènes; je ne sais s'il y a deux choses indépendantes; mais s'il est lié à de pareils phénomènes, ces derniers ont un tout autre caractère que ce que nous entendons en les nommant. N'ayant jamais su, même très jeune, ce qu'est une substance, je n'irai pas vous dire que je regarde la pensée comme étant une substance distincte. Il ne me gêne nullement que vous l'appeliez matière, force, mouvement cérébral, ou d'un autre nom, pourvu que ce ne soit pas « épiphénomène ». Il ne me choque pas qu'on cherche à réaliser la vie dans un laboratoire; ce n'est pas,

toutefois, un bon sujet de thèse pour les débutants. Admettons qu'on fabrique des êtres pensants, à la suite d'opérations bien déterminées : c'est alors que ce que nous appelons matière a des propriétés, des activités possibles qui ne sont pas ce que nous connaissons actuellement dans la matière. Malgré tout, je crois sentir, au fond du drame complexe qui aboutit à la formation de notre conscience, une activité qui ressemble moins aux phénomènes mécaniques qu'à ma volonté de vivre, à mon désir de plus penser et de mieux penser. Elle a été servie par les phénomènes mécaniques, qui ont fait disparaître les résultats de tentatives infructueuses, où elle ne s'est pas épuisée.

Voici que vient de naître un de ces admirables élus dont vous nous avez décrit la très vieille noblesse. En quelques jours, sous le coup de ses sensations répétées, s'éveillera la mémoire inconsciente que lui ont léguée ses innombrables ancêtres. Il reconnaîtra ces sensations, les distinguera, les rapprochera, les classera ; il rapportera au même objet les sensations très diverses dont vous dites qu'elles appartiennent à des *cantons* différents ; il situera les objets dans l'espace et les phénomènes dans le temps ; il saura atteindre les uns et se rappellera les autres ; il comprendra les signes ; il apprendra le nom d'un objet particulier, il donnera un même nom à des objets dont il aura saisi les analogies ; il aura des concepts distincts. Les cadres de sa pensée sont formés d'avance ; ils se remplissent avec une facilité et une rapidité merveilleuses. L'inextricable complexité du monde extérieur se résoud en concepts séparés et simplifiés. Assurément

ces séparations et ces simplifications naïves fournissent une image très imparfaite de la réalité, une image pourtant qui s'y adapte assez pour que l'enfant puisse en tirer parti ; les premiers linéaments de cette image sont, en quelque sorte, grossièrement dessinés en lui ; c'est ce qui lui reste de sa vie antérieure, chez ses ascendants, une photographie confuse des choses qui ont posé devant eux, le plus souvent ; sa vie actuelle ajoutera à ce dessin primitif d'infinies complications de riches et éclatantes couleurs, des nuances délicates. Ses premiers concepts, séparés et simplifiés, permettront bientôt à l'enfant des ébauches de raisonnement, des syllogismes naïfs, dont les membres ne sont pas disjoints, mais où la conclusion apparaît, par une intuition immédiate, comme contenue dans les prémisses ; l'attribution, à un objet particulier, d'un nom général est déjà un tel syllogisme : je vois un chêne ; un chêne est un arbre ; je vois un arbre.

Ces premières connaissances tendent à s'organiser ; l'enfant cherche inconsciemment à y mettre un peu d'ordre, qui se traduit par un enchaînement de mots et de phrases auquel il se plaît ; à l'intérêt, d'ordinaire très dispersé, que les choses éveillent en lui, succède l'attention, qui se concentrera plus tard sur des concepts abstraits, et sur leur dépendance.

La plupart des concepts résultent, à ce que je crois, de simplifications excessives, de séparations trop nettes : ils n'en conviennent que mieux à la logique ; qu'ils s'adaptent à peu près à la réalité, c'est ce qui est plus étonnant, quoiqu'ils aient été préparés par la pression répétée de l'expérience. Quelques-uns d'entre eux, et notam-

ment les concepts scientifiques, sortent d'un passage à la *limite*, dont l'étrange audace m'effraie depuis longtemps. Le mathématicien raisonne sur des points, des droites et des plans qui n'existent que dans sa pensée, sur des solides parfaits, sur des fluides parfaits; la perfection de ces solides et de ces fluides est impossible, contradictoire avec ce que nous savons de la matière. Le physicien raisonne sur des systèmes isolés; il ne peut y avoir de pareils systèmes. Le chimiste raisonne sur des corps purs; il n'y a pas de corps purs.

Tout d'abord, ces concepts nous sont assurément suggérés par les objets réels; mais nous n'y parvenons qu'en poussant jusqu'à l'infini quelque propriété que nous avons observée : nous avons observé, par exemple, des corps plus durs que d'autres; notre pensée, d'un bond, va jusqu'au bout : elle crée le corps parfaitement solide et ce concept limite arrive à former le fond même de notre idée de la matière. Le physicien sait très bien qu'il n'y a pas de corps solide; il n'abandonne pas pour cela cette notion : il attribue la parfaite solidité à l'atome, avec quoi il constitue la matière; parfois, il ajoute à cette parfaite solidité de l'atome, une parfaite élasticité, sans trop se soucier de savoir si ces deux qualités parfaites ne se gênent pas en s'ajoutant.

Dire que ces concepts limites préexistent dans notre esprit, qu'ils font partie du dessin primitif qui est le résidu de la vie ancestrale, vous semblera peut-être exagéré ; mais, au moins, une certaine tendance à la formation de ces concepts limites me paraît inhérente à notre pensée telle qu'elle est par elle-même, ou qu'elle est devenue

par la suite des testaments qui l'ont enrichie peu à peu. Cette tendance à la formation de concepts limites, infiniment éloignés de ce qui nous les suggère, me semble du même ordre que la tendance à la séparation et à la simplification que j'ai voulu indiquer un peu plus haut.

Vous me dites que, quand je vois de loin une surface à peu près plane, dont je ne puis apercevoir les irrégularités, je vois un plan parfait; non, je *pense* un plan parfait. La tendance dont je viens de parler est entrée en jeu; le concept limite a surgi en moi; j'ai comparé ce concept parfait à ce que je vois, je n'ai pas aperçu de différence. Le régulier est antérieur, dans mon esprit, à l'irrégulier, qui le suppose. Ne me répondez pas que je suis la dupe de mes habitudes de fonctionnaire en mathématiques : je crois que les choses se passent de la même manière dans la tête du petit breton qui, du haut de la falaise, regarde la mer et s'amuse de la voir tout unie, de ne pas distinguer les vagues. D'ailleurs, que savent les mathématiciens sur le plan, la ligne droite ou le point? A quoi a abouti leur long et minutieux travail d'analyse sur ces concepts fondamentaux? A proclamer l'impossibilité d'une définition, à déterminer tout au plus la façon dont il convient de parler de ces êtres indéfinissables, si l'on veut construire des phrases correctes. Ces notions préexistent dans notre pensée en puissance et, si vous voulez, comme tendance. Notre propre expérience nous les révèle. Si je suis disposé à croire, comme vous, que l'expérience ancestrale a tenu un rôle essentiel dans le développement de cette tendance, je tiens à remarquer que cette expérience n'a jamais été

directe, que les animaux rudimentaires que nous pouvons compter parmi nos ancêtres n'ont pas vu ou touché plus de plans parfaits que nous ne faisons, et que l'industrie humaine réalise des formes géométriques beaucoup moins grossières que celles que nous observons dans la nature.

Et pourquoi ces tendances, que je crois démêler obscurément dans notre pensée, n'auraient-elles pas leur principe dans cette pensée ? Je ne dirai plus qu'elle a été modifiée, transformée, organisée dans les êtres vivants par le frottement et la pression du milieu où sont plongés ces êtres, je dirai qu'elle s'est modifiée, transformée, dans ce milieu, dont ils font partie et dont elle est une *qualité* essentielle. Je vous accorde tout ce que vous voudrez sur la part de l'évolution dans la formation de notre pensée; je vous accorde que l'évidence est le résultat de l'habitude de l'individu et de la race. Mais les expériences dont cette habitude est faite ne sont pas des phénomènes purs et simples; elles sont des impressions sur ce qui sera ou sur ce qui est une conscience vivante, sur des consciences reliées les unes aux autres, dont les états s'enchaînent d'une certaine façon dans l'individu et dans la race. Tous les fils de ce bureau récepteur auquel vous nous comparez, ce n'est pas les phénomènes qui les ont posés pour entrer en communication avec nous; c'est nos ancêtres qui les ont construits pour communiquer avec les phénomènes, et qui nous ont légué ce merveilleux réseau.

Je viens de relire cette page, où j'aurais voulu montrer l'activité propre de la pensée : hélas ! Comment montrer ce que je connais si mal, et mettre de l'évidence où je n'ai qu'un désir de

vérité? Ce que j'ai écrit est trouble et obscur, et, peut-être, pas assez trouble et pas assez obscur; cela reflète la confusion de mes idées. A quoi bon essayer de faire mieux? J'ai aussi à m'excuser d'avoir écrit un mot qui a dû vous choquer, et qui sent la scolastique. Je connais votre horreur pour la *qualité* : au reste, là où je l'ai mis, ce mot rendait assez mal ma pensée; j'en ai cherché un autre; en vain. J'ai fini par le laisser, parce que, au fond, je ne partage pas votre haine pour la qualité. Si la qualité n'est qu'un mot, la quantité, elle aussi, n'est qu'un signe; votre *monisme* n'absorbera jamais la diversité des aspects de l'être, la multiplicité des phénomènes, la richesse infinie du vêtement de l'inconnaissable. Parce que nous essayons de construire, avec un jeu de symboles quantitatifs, un schéma qui nous représente le monde, ne prenons pas ce schéma pour la réalité, et la partition écrite, où toutes les notes sont pareilles, pour le concert des instruments et des voix. L'uniformité des notations mathématiques n'empêche pas la diversité de nos sensations : c'est des sensations qu'il faut toujours partir, à elles qu'il faut toujours revenir ; mais cette digression m'entraînerait trop loin; je reviens à mon obscur sujet.

Les concepts généraux, qui se dégagent dès nos premières années, les concepts limites qui servent de fondement aux sciences et qui ne se forment sans doute qu'un peu plus tard sont éminemment adaptés à la logique déductive. Sous le nom d'imagination verbale, vous avez signalé l'abus qu'on en peut faire; cet abus n'est pas douteux et je vous dirai tout à l'heure en quoi il me semble que vous l'exagérez et comment

vos exemples ne sont pas tous bien choisis; mais, pour le moment, l'abus n'est pas en question. Vous connaissez trop la logique déductive et vous en usez trop pour en contester la valeur; j'ai déjà dit qu'on en pouvait apercevoir les traces dans des raisonnements très naïfs, dans l'intuition de l'emboîtement des concepts les uns dans les autres : une classe d'objets contient une autre classe moins générale, qui en contient une autre..., qui contient des individus.

Je ne répugne nullement à imaginer de pareilles intuitions, non seulement chez les hommes primitifs, mais même chez leurs ancêtres, ni à regarder leur évidence comme un résultat de l'habitude et le réveil de la mémoire inconsciente.

Il est fort probable que beaucoup d'hommes appartenant même aux races qui se disent supérieures, ne dépassent guère ces intuitions immédiates et ces raisonnements naïfs; ils seraient capables d'aller plus loin, ils n'en ont pas l'occasion et peuvent se reproduire sans cela. Bien qu'on puisse trouver des intermédiaires, reconnaissons qu'il y a loin de ces intuitions à une affirmation comme celle-ci : telle proposition est impliquée dans telle autre; si celle-ci est vraie, la première est vraie aussi; si la première est fausse, celle où elle est impliquée est fausse aussi. Vous savez aussi bien que moi le rôle que tiennent dans la science les jugements de cette sorte, la façon dont ils s'enchaînent, s'enchevêtrent et se diversifient; vous savez aussi bien que moi l'entière évidence de ces jugements, la façon dont nous sommes obligés de nous soumettre à leur nécessité. Je suis tout à fait certain qu'il y a des nombres premiers qui, écrits dans le système

décimal, auraient plus d'un millier de chiffres, qui, divisés par 4, donnent 1 pour reste et qui sont la somme des carrés de deux nombres entiers, qu'il y en a d'autres qui, divisés par 4, donnent 3 pour reste et qui ne sont point la somme de deux carrés; je n'ai aucun doute à se sujet; ma certitude dépasse infiniment celle que je sens en me disant que le porte-plume avec lequel j'écris tombera sur mon bureau, si je le lâche. Eh bien! il me paraît clair que l'évidence des raisonnements mathématiques ne résulte pas d'expériences directes, ni d'expériences que j'aie faites, ni d'expériences faites par mes ancêtres. Il se peut que mes grands-parents aient fait quelques petits raisonnements d'arithmétique en vérifiant leurs comptes qui, sans doute, n'étaient pas bien longs; il ne faudrait probablement pas remonter très loin dans la lignée de nos ancêtres pour y trouver des gens qui n'avaient point l'idée d'un raisonnement mathématique, ou de l'implication d'une proposition dans une autre. Que pensez-vous à cet égard, des anthropopithèques? Je vous en prie, ne remontez pas plus haut.

J'insiste sur ce qu'un homme qui a reçu une éducation suffisante puise dans les raisonnements déductifs bien faits une entière conviction. Quoique la faculté de construire de tels raisonnements n'apparaisse qu'assez tard, elle est essentielle à notre pensée. A quelle habitude correspond l'évidence qui accompagne l'exercice de cette faculté? ce n'est point à une habitude *directe*. Le frottement du monde extérieur n'a pas supprimé, sans qu'ils laissassent de descendants, ceux qui construisaient mal des raisonnements, qu'ils ne construisaient pas du tout. Il a tout au plus supprimé,

avec une intelligence qui m'étonne, ceux chez lesquels se développait de travers ce qui, un jour, devait être cette faculté. Je suppose bien qu'elle se préparait chez nos ancêtres quand même ils ne l'exerçaient pas. Peut-être en a-t-il été souvent ainsi : nous ignorerons probablement toujours la façon dont l'être vivant a réagi contre le milieu extérieur, comment s'élaborait en lui ce qu'il allait devenir, comment il s'est servi, pour se défendre, des armes qu'il avait déjà et a su les adapter à de nouveaux usages. Les facultés qui se sont développées ont peut-être toujours dépassé infiniment les circonstances qui leur ont permis de se produire et de durer. A chaque moment de leur développement, se préparaient des adaptations infiniment lointaines. J'imagine que nos ancêtres ont toujours pu beaucoup plus qu'ils n'ont réalisé, que nous pouvons nous-mêmes beaucoup plus que nous ne faisons. Nous sommes des paresseux, des endormis, des timides, des tièdes; nous ne savons pas découvrir au fond de nous le trésor des énergies futures. Il y aurait toute une morale... ; mais ce n'est pas de morale qu'il s'agit, revenons à la logique.

Peut-être une objection vous passe-t-elle par l'esprit et pensez-vous m'attaquer sur cette évidence absolue que j'attribue aux déductions logiques? Il n'y a rien d'absolu, direz-vous ; notre logique n'est que notre logique, à nous. D'accord ; mais vous vous refuserez comme moi à discourir sur une pensée où l'implication des propositions ne serait pas pareille à ce qu'elle est dans la nôtre ; toute discussion là-dessus est évidemment très vaine : il va sans dire que nous pensons avec notre pensée et cette évidence absolue dont

il a été question ne regarde qu'elle. Je vous ai parlé de choses que je n'entends point; je n'irai pas jusqu'à disserter sur une pensée qui n'aurait rien de commun avec la mienne; il faut, pour m'amuser, que je m'imagine comprendre un peu au moins une partie de ce que j'écris.

Au reste, je vais essayer d'aller un peu plus loin et de m'expliquer sur cette *nécessité* que nous ne pouvons nous empêcher d'attribuer aux déductions logiques. J'aurai, en même temps, l'occasion de m'arrêter sur la différence que je crois apercevoir entre la façon dont est sentie la nécessité par ceux qui sont surtout habitués aux raisonnements mathématiques et par ceux qui ont surtout l'habitude des méthodes expérimentales.

En parlant de la nécessité des déductions logiques, je n'entends proprement que la nécessité que nous attribuons aux affirmations telles que celle-ci : la proposition A entraîne la proposition B ; si la proposition A est vraie, la proposition B est vraie aussi, je n'entends pas parler de la vérité de la proposition A, en elle-même : c'est dans l'implication seule qu'est la nécessité, non dans l'une des propositions.

De plus en plus, les mathématiques tendent à se réduire à de pareilles implications, et à se débarrasser, à se vider de l'impure réalité ; je doute qu'elles arrivent jamais à cet état idéal d'une science « où l'on ne sait jamais de quoi on parle, ni si ce qu'on dit est vrai », mais, qu'elles y tendent, cela est manifeste. On m'a raconté récemment qu'il y a déjà, dans un pays moins rétrograde que le nôtre, un traité de géométrie élémentaire qui commence par cette phrase : « Peu importe ce qu'on appelle point, droite, plan,... » Au moins,

cher ami, n'allez pas raconter que j'approuve ce début : il ne manquerait pas de gens sensés qui m'obligeraient à donner ma démission. Quoi qu'il en soit, en mathématiques, l'implication des propositions les unes dans les autres est seule nécessaire. Il suit de là que leur nécessité n'est que dans notre propre pensée et ne regarde en rien les choses. Quant au possible, c'est simplement, pour le mathématicien, ce qui n'implique pas contradiction dans les termes.

Le point de vue de l'expérimentateur est très différent : tout d'abord il admet sans contestation que ce qui s'est passé dans certaines conditions se reproduira à peu près dans des conditions analogues ; il qualifie de nécessaire cette répétition des phénomènes ; sans qu'il s'explique sur le sens de cette nécessité, il la met dans les choses, non en lui. Peu à peu, il tend à confondre le réel, en tant qu'il est connu, avec le nécessaire. Il qualifie de possibles les événements qu'il prévoit imparfaitement, d'impossible ce qui ne s'est jamais vu, et ne se verra pas. Il acquiert, des phénomènes qu'il étudie, une habitude qui joue un rôle analogue à celui du *bon sens* dans la conduite de la vie : le *bon sens* n'a pas de place en mathématiques. D'autre part, il arrive à condenser des groupes de phénomènes en lois, qui sont parfois susceptibles d'un énoncé mathématique et qui se prêtent aussi au raisonnement déductif, en les supposant vraies. Il confond alors la nécessité propre au raisonnement déductif avec cette nécessité qu'il s'est habitué à mettre dans les choses. Ce qu'il appelle une démonstration est, d'ordinaire, un mélange de déductions mathématiques et d'inductions tirées de ce précieux *bon sens*

qu'il a acquis et qu'il partage avec ceux qui ont les mêmes habitudes que lui : pour ses collègues en bon sens, sa démonstration est convaincante. L'insupportable mathématicien demande qu'on lui expose clairement et d'abord les postulats et les hypothèses : il prétend qu'on n'oublie rien ; il se fâche et menace de s'en aller si, au courant de la démonstration,on fait intervenir quelque chose qui n'a pas été convenue, afin de remplacer ou de renforcer un chaînon qui manque dans la déduction. Notez que c'est le physicien qui a raison, puisque sa science progresse ; le mathématicien, avec ses exigences et son défaut de *bon sens*, n'arrivera à rien. Le pédant qu'il est exige qu'une science soit faite, quand elle est en train de se faire ; mais j'observe que pour les uns et les autres, les mots *nécessaire*, *possible*, *impossible*, *absurde*, n'ont pas la même signification.

Par exemple, un être qui vit et qui pense dans un espace à deux dimensions vous semble impossible, absurde... ; c'est pour vous un produit de l'*imagination verbale;* pourquoi ? Parce que vous êtes bien sûr de ne le rencontrer jamais. Je ne crains, non plus que vous, cette étrange rencontre ; mais il ne me gêne pas de parler de cet être-là après dîner. (Nous n'avons pas dîné ensemble depuis longtemps, je vous préviens que je ne bois guère que de l'eau.) Un être qui pense sans un cerveau vivant, quelle absurdité ! « Changez, s'il vous plaît, cette façon de parler », et dites seulement que la pensée ne se manifeste à nous que dans des êtres qui ont un cerveau vivant. Si, par suite de cette maladie dont je vous ai déjà parlé et que les aliénistes n'ont pas encore nommée, dans un accès de la manie de la conti-

nuité, je me plais à imaginer qu'il y a de la pensée partout, sans que je m'en aperçoive, il ne faut pas vous irriter, ni prétendre me faire enfermer. Entre la pensée et l'absence du cerveau, je ne vois pas de contradiction dans les termes et cela suffit pour que je sois libre de m'amuser au roman de l'être à deux dimensions.

Permettez-moi, par un autre exemple, de vous montrer la différence des points de vue : vous reprochez aux mathématiciens leurs spéculations sur l'infiniment petit : que savent-ils donc de l'espace infiniment petit ou infiniment grand pour se permettre d'affirmer que les propriétés observées sur des dessins qui sont « à leur mesure » se conservent dans des figures infiniment petites ou infiniment grandes? Que savent-ils de l'espace *réel ?* Rien du tout, mon cher ami, pas même (s'il y en a un) de celui qui est à leur mesure : c'est vous qui vous préoccupez du réel, vous et vos confrères, et vous avez bien raison, car c'est grâce à vous autres que nous arrivons à le connaître, à le faire entrer dans notre pensée, à le maîtriser; mais les mathématiciens?..... Ils ont posé un espace qui jouit de certaines propriétés, et ils se plaisent à poursuivre les conséquences de ces propriétés. Que leurs spéculations sur le fini et l'infini s'appliquent au réel, j'en suis émerveillé ; c'est un fait devant lequel il faut bien nous incliner tous les deux. Voyez-y, s'il vous plaît, la bienfaisante influence des causes destructives. En spéculant sur les figures infiniment petites, les mathématiciens ont créé l'admirable instrument que vous connaissez et qui, en astronomie notamment, leur a rendu des services incontestables. Pour le moment, je n'attribue pas la même importance

aux spéculations sur l'homme à deux dimensions.

Revenons à la nécessité des physiciens ; vous savez combien le sujet m'a toujours préoccupé et vous vous étonneriez si je ne m'y arrêtais pas ; vous m'accuseriez peut-être de quelque lâcheté ; vous auriez tort : la vérité est que je veux, en passant, dire son fait au déterminisme.

Au fond des sciences expérimentales, il y a un postulat indispensable, qui est pleinement justifié par leurs succès et dont, bien entendu, je ne contesterai pas la valeur : c'est que chaque phénomène est déterminé par quelques phénomènes, en petit nombre, en ce sens que la connaissance approximative de ceux-ci suffit à la connaissance approximative de celui-là.

Loin d'impliquer la dépendance mutuelle de tous les phénomènes, la science expérimentale suppose que chaque phénomène est à peu près indépendant de l'infinité des autres phénomènes. Quel est le chimiste qui pense à la longitude ou à la latitude de son laboratoire ou qui ne croira pas que je me moque de lui si je vais lui soutenir que la réaction qu'il étudie peut bien réussir le mardi et non le jeudi ? Le droit qu'il a d'éliminer presque tout ce qu'il appelle les circonstances de son phénomène est capital pour le savant : c'est le *bon sens* (le bon sens du chimiste) qui, pour lui, légitime et fonde ce droit.

Je dois être sincère et corriger ce qu'il y a d'excessif dans mon affirmation que les sciences expérimentales postulent plutôt l'indépendance des phénomènes que leur dépendance mutuelle ; il me faut bien reconnaître que le nombre des circonstances dont dépend pour nous la connaissance d'un phénomène augmente singulièrement

avec la précision de cette connaissance. En dépit de cette concession, que je vous fais avec mauvaise humeur, la notion d'un déterminisme total me semble une de ces notions limites, comme le solide parfait, le fluide parfait, qui sont commodes sans doute, mais dont il ne faut pas être les dupes.

J'ajoute qu'on ne me paraît pas faire assez attention à la relativité de cette notion : rien n'échappe à la relativité. Le déterminisme suppose une pensée ; c'est pour une pensée que les choses sont déterminées. Les choses sont déterminées, cela veut dire : il est possible de connaître les choses. Le déterminisme en soi, tout seul, n'a pas de sens. Veut-on dire, en affirmant le déterminisme, que les choses se sont passées, se passent ou se passeront de quelque façon ? C'est une pure niaiserie, que je ne vous prête pas. Non, il faut entendre : les choses se passeront d'une façon certaine. Certaine pour qui ? Pour un être pensant. Tout est connaissable, intelligible, tout peut être objet de pensée.

Quelques-uns se sont plu à imaginer les lois naturelles comme impliquées les unes dans les autres, à la façon des propositions mathématiques, et dominées par un système de formules qui les contiendrait toutes. Qu'est-ce qu'une formule, sinon un assemblage de signes ? Et des signes sont moins que rien s'ils ne sont pas pensés.

Je ne veux pas du tout discuter ces conclusions ou ces hypothèses. Mais elles me ramènent à mon point de départ. Si elles sont vraies, le bel épiphénomène que la pensée ! Et vraiment, vous avez eu tort de railler la petitesse de notre taille, je pose à nouveau ma question du début : sommes-

nous distincts de ce que nous pensons, et en quoi ? Voici que nous embrassons le système solaire ; nous le pensons ou il se pense en nous ; assurément nous connaissons mal le système solaire qui est nous et que nous sommes ; mais, d'un autre côté, voici que nous commençons à compter et à mesurer les atomes que nous ne verrons jamais. Du système solaire, nous passerons à la voie lactée, et, de l'autre côté, nous atteindrons les propriétés de l'atome. La voie lactée, la molécule matérielle, la cellule vivante, prendront en nous conscience de ce qu'elles sont. Et nous, les hommes, la conscience obscure que nous avons les uns des autres s'illuminera. Tout cela n'est pas bien sûr ; mais faisons notre possible pour que « l'essai ne manque pas par notre faute », et puissent nos descendants parvenir au paradis de M. Poincaré, où ils s'abîmeront dans la contemplation de la vérité ! *Amen.*

En tout cas, nous voici déjà loin de ce qui est indispensable à notre continuation immédiate et à notre reproduction ; n'approchons-nous pas de ce qui servira à la lointaine continuation de notre race ? Que l'expérience de nos ancêtres ait fortifié, compliqué, affiné la correspondance entre les choses et nous, que cette correspondance se soit développée dans le sens de l'utilité, c'est entendu ; mais je suis porté à croire, par ce que nous observons, que l'utilité immédiate a été constamment dépassée et qu'elle tend à l'être infiniment ; et cela, en vertu de ce qu'est actuellement notre pensée, de ce qu'elle veut et cherche.

Au reste, pour ce qui est de la science, j'imagine, malgré tout, que vous êtes de mon avis ; votre vie et vos travaux le prouvent assez. La

science ne se propose même pas la recherche directe de ce qui est utile à l'humanité : son but véritable est la connaissance pure, où ses disciples trouvent une joie qui vous est familière. Qu'elle atteigne parfois ce qui est utile à notre race, ce n'est pas pour en diminuer la valeur, c'est une bonne confirmation de ses résultats et une preuve qu'elle se développe dans le sens d'une adaptation plus parfaite de notre pensée aux choses ; nous ne reprocherons pas à Pasteur de s'être réjoui parce qu'il avait diminué quelques souffrances. Au reste, pour prendre sa pleine vitesse de développement, la science a besoin de nombreux efforts qui ne seront possibles et ne pourront se coordonner que dans une humanité délivrée d'une partie des soucis et des misères qui l'accablent, dans une humanité où la joie de penser à autre chose qu'au pain quotidien ne sera plus le privilège de quelques rares individus. C'est de la science que j'espère, pour des périodes éloignées, cette libération de nos arrière-petits-enfants, et je compte sur la pensée pour réaliser des changements matériels dans ce monde.

Je m'aperçois, mon cher ami, que je me suis laissé aller à la manie des gens qui racontent leurs rêves ; j'y ai pris grand plaisir, et cela suffira à m'excuser à vos yeux, car je sais que vous aimez le rêveur, qui vous est bien affectueusement dévoué.



CHAPITRE IV

LA PHILOSOPHIE DE M. HENRI POINCARÉ[1]

Ces deux volumes, dont le second vient de paraître, dont le premier date de trois ans à peu près, se complètent l'un l'autre ; quelques-uns diront peut-être que le second corrige parfois le premier ; je ne crois pas que cela soit vrai : c'est bien toujours la même pensée, parfois plus claire et présentée avec plus de détails ; mais l'auteur n'a rien à renier de ce qu'il a écrit, et il peut dire, non sans quelque allégresse : « Eh bien, j'avais raison autrefois, et je n'ai pas tort aujourd'hui. »

On s'est parfois effrayé de son scepticisme ; il secoue toutes les conventions, bouscule ceux qui dormaient dessus, dans une pose solennelle ; il cogne joyeusement sur les principes, pour entendre s'ils sonnent creux ; il n'a aucun respect pour les coffres-forts, avant d'avoir regardé dedans et examiné curieusement les titres qu'ils contiennent ; peut-être s'est-il amusé parfois de la mine effarée des gens qu'il a éblouis en jetant une lumière trop vive sur la relativité de nos connaissances. Ce n'est point un sceptique : « La recherche de la vérité doit être le but de notre activité ; c'est la seule fin qui soit digne d'elle. »

1. POINCARÉ (H.). *La Science et l'Hypothèse. — La valeur de la science.*

Il aime passionnément la vérité, pour elle-même, non pour les applications que l'on peut en tirer. Celles-ci sont utiles, un peu parce qu'elles font honneur à la vérité auprès de tous, un peu parce qu'elles servent de vérifications et permettent de grandioses expériences, surtout parce qu'elles finiront un jour par laisser plus de temps aux hommes, pour chercher la vérité et pour en jouir. Il aime la vérité, d'abord parce qu'elle est vraie, puis parce qu'elle est belle : il se réjouit et s'étonne un peu de la trouver telle, de rencontrer de l'ordre et de l'harmonie dans ce monde. Nul doute que M. Poincaré ne soit très sensible à toutes les formes de la beauté, mais on sent combien la beauté scientifique l'émeut et le réjouit profondément. Que ceux qui créent cette beauté la sentent plus vivement que tous, cela est juste ; que la beauté des théories scientifiques devienne pour les hommes une source nouvelle d'émotions esthétiques, dont ils jouiront par cela seul qu'ils comprendront ces théories, c'est ce que l'on peut espérer, d'autant que pour comprendre et saisir une théorie scientifique, il faut vraiment agir, et que cette action donne à ceux qui en sont capables l'illusion qu'elle les élève jusque vers ceux qui ont trouvé la vérité ; nulle part, celui qui jouit de l'œuvre n'est mieux en communion avec celui qui l'a créée. Souhaitons, avec M. Poincaré, que les applications de la Science laissent aux hommes assez de loisirs pour qu'ils puissent savourer cette jouissance-là. Une pareille espérance a enchanté bien des âmes tendres, depuis l'époque reculée où, dans un coin de la Grèce, le constructeur d'un moulin à eau gravait sur la pierre ces paroles, qu'il prêtait à la nymphe du

ruisseau : « Réjouis-toi, pauvre esclave, et repose-toi, c'est moi qui moudrai le grain à ta place... ».

Non, M. Poincaré n'est pas un sceptique, mais c'est un critique puissant, qui descend au fond de sa pensée, et de celle des autres, et qui n'a nullement peur s'il y rencontre des ténèbres. Il est venu bien à propos pour prouver que l'esprit critique n'est point incompatible avec l'esprit créateur, et fournir une réponse suffisante à la phrase banale que répètent volontiers ceux qui n'ont ni l'un ni l'autre esprit.

On retrouvera, dans ses deux Volumes, plus d'une page qu'on se rappellera avoir lues dans une Revue, dans une Préface, ou ailleurs ; personne ne s'en plaindra.

Le premier, *La Science et l'Hypothèse*, s'ouvre par un beau Chapitre sur la notion de nombre et sur la nature du raisonnement mathématique. L'auteur y insiste avec force sur le mode de raisonnement par induction : *Si un théorème est vrai pour le nombre* 1, *si l'on a démontré qu'il est vrai pour* $n+1$, *pourvu qu'il le soit de* n, *il sera vrai de tous les nombres entiers positifs ;* c'est pour lui le type du *jugement synthétique a priori*. Il passe ensuite à la notion d'espace et aux diverses géométries : on retrouvera là cette lumineuse démonstration qu'il a donnée de l'impossibilité de prouver expérimentalement la vérité objective de la Géométrie euclidienne. Plusieurs des idées qu'il a introduites dans cette partie de son Livre sont reprises dans le second Volume, *La valeur de la Science*, et mises en pleine lumière ; je signalerai, en particulier, ce qui concerne le *continu physique*, la définition de ce que l'on doit entendre par un con-

tinu à *n* dimensions, les discussions relatives aux espaces visuel, tactile, moteur, aux nombres des dimensions de l'espace. La notion de temps qui avait été laissée de côté dans le premier Volume est, dans le second, l'objet d'une critique approfondie. Sans doute, M. Poincaré s'est nourri de Kant; il ne peut, toutefois, garder tout entière la doctrine du maître : l'espace n'est pas une forme imposée à notre sensibilité. « Ce qui est l'objet de la Géométrie, c'est l'étude d'un *groupe* particulier; mais le concept général de groupe préexiste dans notre esprit, au moins en puissance. Il s'impose à nous, non comme forme de notre sensibilité, mais comme forme de notre entendement. » Voilà la théorie des groupes de Lie passée à la dignité de *forme a priori*. Si Kant n'avait pas su aller jusque-là, on peut l'excuser.

Déjà, dans ce chapitre sur la Géométrie, se montrent nettement quelques-unes des idées fondamentales qui, chez M. Poincaré, dominent toute la critique de la Science. Ce n'est pas l'expérience qui nous a appris combien l'espace a de dimensions, ni s'il était euclidien; l'expérience n'a pas porté sur l'espace, mais sur nous-même, sur notre corps et les objets voisins. L'expérience nous a guidés en nous montrant quel choix s'adapte le mieux aux propriétés de notre corps. Il nous est commode de raisonner sur l'espace comme s'il était euclidien.

La critique des principes de la mécaniqne conduira à des conclusions analogues : ces principes n'ont pas de certitude objective; ils sont provisoirement commodes; ils le resteront longtemps sans doute, peut-être toujours : toutefois, la crise actuelle de la Physique mathématique, étudiée

d'une façon si intéressante dans la Conférence de Saint-Louis, ne laisse pas que de causer des inquiétudes à cet égard. D'une part, sans doute, on peut sauver les principes, les sauver à tout prix, comme on *sauve la face*, en les mettant hors de l'expérience, et en introduisant des êtres hypothétiques et invisibles, auxquels on donne justement les propriétés dont on a besoin ; mais un principe cesse d'être fécond si l'expérience le condamne sans le contredire directement. C'est loyalement que l'on doit s'efforcer de sauver les principes qui nous ont rendu tant de services ; on ne les abandonnera, s'il le faut, qu'après cet effort : alors, ils disparaîtront à demi, dans de nouvelles formules, où l'on pourra sans doute retrouver leurs traces, ou bien ils subsisteront à demi, suffisants pour une première approximation.

Ainsi, c'est, au fond, notre propre commodité, la facilité pour notre intelligence de construire son schéma de l'univers, qui décide de la valeur des principes de la Science. L'homme reste, suivant la parole du sophiste grec, la mesure de toutes choses. Je crois bien qu'il ne faut pas s'effrayer de cette conclusion ; elle n'implique nullement la ruine du *réalisme*, si l'homme n'est pas séparé des choses, si c'est en lui qu'elles prennent conscience, qu'elles deviennent intelligibles. Peut-être l'intelligence de la race s'adapte-t-elle de mieux en mieux aux choses, par l'accumulation des expériences vulgaires, et l'intelligence des savants, par la répétition et l'habitude des expériences scientifiques. C'est ainsi que, dans les applications industrielles de la Science, les organes des mécanismes se perfectionnent et se com-

pliquent de jour en jour, pour mieux s'adapter aux besoins de l'industrie, et que leur perfection actuelle permet de prévoir, pour demain, une nouvelle adaptation à d'autres besoins. L'organe et la fonction réagissant continuellement l'un sur l'autre, il ne faut pas les séparer. Il ne faut pas séparer l'homme du milieu qui vit en lui, par lui, autour de lui. La Science est la relation de l'homme et de ce milieu. Sans doute, nous ne pouvons sortir de nous-même, mais nous sommes dans le milieu que nous prétendons connaître. La Science sera toujours *notre* Science, cela est trop clair, mais elle n'est, pour cela, ni un rêve incohérent, ni un discours bien enchaîné, et qui ne veut rien dire.

Qu'elle ne soit qu'un discours, un jeu de définitions, de conventions, puis de déductions formelles, c'est ce que quelques philosophes, dont le talent scientifique n'est d'ailleurs pas contestable, se sont plu à soutenir. M. Poincaré leur avait fourni quelques armes, dont ils avaient su profiter et, d'ailleurs, tout n'est pas faux dans leur argumentation, puisque, quand la Science s'organise sous une forme logique, il faut bien mettre les définitions au commencement; à celui qui débute, ces définitions peuvent sembler arbitraires, et c'est, très souvent, l'ensemble même des déductions, l'accord des conclusions avec la réalité expérimentale, qui justifient ces définitions au moins d'une façon provisoire. Sans rien retirer de ce qu'il avait dit auparavant, M. Poincaré montre clairement que, si la Science est relative à l'homme, elle n'est pas relative à un individu, ni à un savant particulier, au vouloir propre de ce savant, qu'elle n'est pas une œuvre artificielle,

mais bien le produit naturel d'une entente. Et, d'ailleurs, que veut-on dire quand on soutient qu'elle ne vaut que pour l'*action* ? Si elle vaut pour l'action, c'est que l'expérience la vérifie. Que veut-on dire quand on soutient qu'elle ne vaut que pour notre pensée ! Quelle pensée pouvons-nous concevoir, qui n'ait rien de commun avec la nôtre ! Et n'est-ce point cette Science, si relative à nous qu'elle soit, qui nous a appris que tout n'était pas fait pour l'homme, qui nous a enseigné la petite place que nous tenons dans l'Univers, dans cet Univers dont notre pensée, en obéissant aux lois qu'elle a découvertes, pénètre une partie chaque jour plus grande, et comme infinie par rapport à notre corps ?

Pour bien saisir ce qu'est la *valeur de la Science*, il faudrait recommander aux gens instruits, si même ils n'ont pas une culture scientifique spéciale, de lire les quelques pages que M. Poincaré a consacrées à l'Astronomie, à cette Astronomie « qui nous a fait une âme capable de comprendre la nature ». Ils en goûteront tour à tour la fine ironie et la belle éloquence : ils y apprendront comment l'Astronomie a fait pénétrer en nous l'idée de loi scientifique, et comment elle a fourni l'idée d'une telle loi « d'une relation nécessaire entre l'état présent du monde et son état immédiatement postérieur ».



CHAPITRE V

LES PRINCIPES DES MATHÉMATIQUES

1. — Logistique et Arithmétique

M. Lucas de Pesloüan[1] est plein de qualités : il a la fraîcheur, l'ardeur et l'entrain de la jeunesse, de l'abondance et de l'aisance dans le développement, des enthousiasmes qui plaisent, des admirations qui montrent la valeur de son jugement et l'élévation de son esprit ; il imite Pascal, qui est le plus inimitable des modèles ; mais il l'imite parce qu'il l'aime, et il le cite : son ironie est d'ailleurs moins perfide que celle de Louis de Montalte. On le lit sans ennui, et cela est un mérite pour qui parle de Logistique. Il est vrai qu'il n'en parle que peu. Anaxagore voulait que tout fût dans tout ; M. de Pesloüan se contente de dire que tout tient à tout et, à propos de tout, il parle de tout ; encore, lui reste-t-il presque tout à dire ; on s'étonne quand il s'arrête et je crois bien qu'il s'étonne lui-même de s'arrêter ; mais, dit-il, « c'est du travail pour une autre fois ». Voilà qui nous promet une belle bibliothèque ; il faut s'en réjouir.

M. de Pesloüan est fort sympathique. Il ne peut manquer de perdre ce que ses qualités ont d'excessif ; déjà, dans certaines parties de son

1. Pesloüan (L. de). *Les systèmes logiques et la Logistique.*

Livre et sur les sujets sans doute qu'il a le mieux étudiés, il se montre capable de condenser sa pensée ; il en prendra l'habitude ; il saura sacrifier de jolies phrases et des plaisanteries trop aisées ; il s'apercevra que la satire et la fantaisie, pour porter et pour amuser, doivent contenir quelque réalité. Son inspecteur général, qui reproche aux professeurs de collège de ne pas donner à leurs élèves « le sentiment de la contingence des vérités mathématiques » ; son Jules Tannery, qui pérore dans les réunions publiques et qu'il faut laver du vilain reproche d'avoir engendré la Logistique, n'existent pas assez pour être comiques. Et ce n'est pas faire la critique de l'enseignement universitaire que de consacrer tout un Chapitre à un Livre qui n'a pas eu la moindre influence sur cet enseignement. Que cela soit dit sans méconnaître le talent dont l'auteur a fait preuve dans des travaux d'une autre nature. Passe pour M. Couturat; celui-là vaut la peine qu'on l'attaque, et se défendra, s'il lui plaît : il a connu d'autres jouteurs. La fureur de M. de Pesloüan contre lui est extraordinaire et inexplicable. Pour un peu, M. de Pesloüan l'accuserait d'avoir inspiré les articles que M. Mathieu a écrits sur Pascal dans la *Revue de Paris*.

Mais d'où vient cette fureur? S'étend-elle à toute la Logique déductive, à Aristote, à saint Thomas, aux scholastiques, aux Messieurs de Port-Royal, à M. Liard, à M. Lachelier, à tous ceux qui ont traité de cette Logique, ou est-ce seulement à la notation que M. de Pesloüan en veut ? Cette notation est-elle si abominable que M. Couturat, qui, sans doute, ne l'a pas inventée,

n'ait pu l'exposer sans commettre un crime irrémissible? Et pourquoi s'en prendre seulement à lui ? M. de Pesloüan s'est-il contenté de lire M. Couturat et de regarder le formulaire de M. Peano ? Il imite les *Provinciales*, mais Pascal, avant d'aiguiser ses flèches, se *documentait*, comme on dit aujourd'hui, ou se faisait documenter. La *littérature* (comme on dit encore) de l'Algèbre de la Logique n'est pas si étendue que M. de Pesloüan n'ait pu s'en tirer tout seul, et, s'il a trouvé que ce n'était pas la peine de tant lire, était-ce donc la peine d'écrire?

En tout cas, je crois pouvoir le rassurer ; d'ici longtemps, on n'enseignera pas l'Algèbre de la Logique dans les lycées et collèges, on n'interrogera point sur cette Algèbre-là au baccalauréat, on ne créera pas de chaire de Logistique dans les Facultés de droit, et les horrifiques conséquences que prévoit M. de Pesloüan sont aussi chimériques que son inspecteur général.

Il se plaît à insister sur la richesse des intuitions d'où sont sorties les diverses disciplines mathématiques. Il a raison ; il a raison aussi à ce que je crois, de ne pas regarder la déduction comme l'origine des grandes découvertes mathématiques ; il a raison d'exalter la beauté qui pénètre la Science et qui l'illumine ; il a raison encore de faire ressortir le rôle qu'a joué, pour la critique des axiomes, la connaissance de certains faits mathématiques ; mais c'est la réflexion sur les axiomes qui a conduit les géomètres à découvrir ces faits ; c'est par le raisonnement déductif que les Mathématiques s'organisent et la solidité comme l'élégance des démonstrations contribuent à la beauté de la Science ; enfin,

l'analyse des intuitions premières, qui permet de distinguer, dans leur trésor confus, ce qui sert vraiment, ce qui est nécessaire et suffisant à la constitution de la Science, est un travail hautement philosophique. Ici encore, que M. de Pesloüan se rassure : ce n'est pas dans les lycées français que les professeurs de Mathématiques passeront leur temps à cette subtile analyse; j'imagine qu'elle intéresse davantage les philosophes, et cela est fort naturel; qu'elle intéresse aussi quelques maîtres, qui ont l'esprit philosophique, cela me paraît désirable.

Ceux qui ont le mieux étudié les principes sont aussi, sans doute, ceux qui sont les plus discrets en en parlant; ils savent trop à quelles difficultés ils se sont heurtés pour ne pas sentir qu'elles rebuteraient leurs élèves. Je suis bien persuadé que M. Richard, qui a longuement réfléchi sur les postulats de la Géométrie et qui a imaginé un si ingénieux paradoxe sur la théorie des ensembles, ne parle guère de ces sujets dans sa classe. Et croit-on, parce qu'il est philosophe, qu'il enseigne moins clairement l'Algèbre ou la Mécanique?

C'est peut-être les pages de M. de Pesloüan sur la théorie des ensembles qui m'ont le plus intéressé dans son Livre. Assurément, leur auteur ne se faisait pas d'illusions sur les difficultés qu'il y a à exposer si brièvement cette théorie, avec les notations relatives aux nombres transfinis, à des gens qui ne la sauraient point; mais on s'amuse de voir comme il a hâte d'arriver à tous ces paradoxes (y compris ceux de M. Richard) qui, dans ces dernières années, ont fleuri d'une façon si singulière, et dont M. Poincaré

n'a pas dédaigné d'entretenir ses lecteurs ; avec joie, il les développe, il s'essaie à les fortifier, à en exagérer le scandale. Jusqu'où s'élèverait cette joie si la notion d'ensemble et, par-dessus le marché, celle de classe en étaient ruinées ! M. de Pesloüan est trop prudent pour proclamer cette ruine, dès à présent ; mais n'éprouverait-il pas une satisfaction secrète si, du coup, la raison humaine était un peu amoindrie et humiliée ?

*
* *

Voici tout un gros Volume sur le nombre entier, ou plutôt *sur la notion de nombre entier*. Le livre de M. Husserl[1] est fait pour les philosophes ; il peut intéresser cependant les mathématiciens qui essayent d'être philosophes et c'est à ce titre que nous le signalons ; s'il m'arrive en parlant, de dire quelque hérésie philosophique, à supposer qu'il y ait des hérésies en Philosophie, le lecteur voudra bien m'excuser.

Le Livre de M. Husserl est divisé en deux Parties : la première a pour titre les *concepts propres de multiplicité, d'unité* et *de nombre*, et la seconde, les *concepts symboliques de nombre et les sources logiques de l'Arithmétique.*

Dans les deux Parties, il convient d'admirer la richesse d'informations de M. Husserl : les opinions des philosophes et des mathématiciens qui ont touché la matière sont développées avec

1. Husserl (E.-G.). *Philosophie der Arithmetik. Physiologische und logische Untersuchungen.*

ampleur, quelquefois même avec plus d'ampleur que n'ont fait les auteurs eux-mêmes ; le procédé de M. Husserl, pour chaque théorie qu'il analyse et qu'il combat, consiste à l'exposer de la façon la plus cohérente qu'il est possible, d'une façon si cohérente que le lecteur naïf est souvent disposé à accepter tout d'abord cette théorie et s'étonne ensuite, quelques pages plus loin, des lacunes et des inconséquences qu'on lui dévoile. C'est sur la première Partie, ou plutôt sur quelques points qui y sont traités, que j'insisterai.

La notion de nombre entier, pour M. Husserl, résulte, par abstraction, de l'idée de réunion, de collection d'objets distincts ; ces objets peuvent d'ailleurs être de nature quelconque, matérielle ou immatérielle ; ils peuvent être de même nature, ou hétérogènes ; ils doivent être distincts ; mais l'attention se porte sur ce qu'ils sont distincts, non sur ce qui les distingue ; les unités distinctes de la collection, prises ensemble, forment un tout ; cette union entre les parties peut s'exprimer, si l'on veut, par la conjonction *et*, en sorte que les diverses collections que l'on peut former[1] peuvent être représentées par un objet et un objet (ein *Etwas* und ein *Etwas*), un et un et un, un et un et un et un, etc. ; les mots deux, trois, quatre, etc. ne signifient pas autre chose. C'est le nombre *cardinal* que définit donc M. Husserl, et auquel il attribue ainsi le rôle prépondérant : quelques auteurs, et non des moindres, attribuent, au contraire, ce rôle aux

1. Ainsi que me l'a fait observer M. Paul Tannery, la grosse question de savoir si toutes les collections peuvent être obtenues ainsi par l'adjonction répétée d'un objet n'est pas soulevée par M. Husserl.

nombres ordinaux, et pour eux c'est l'idée de rang, de succession, qui est l'idée génératrice du nombre, non celle de collection.

Laissant de côté les innombrables discussions, d'ordre psychologique, auxquelles donnent lieu ces notions, je voudrais m'arrêter un instant à l'idée d'*égalité*, qui intéresse peut-être plus particulièrement les mathématiciens.

C'est à bon droit, à ce qu'il me semble, que M. Husserl critique la célèbre définition de Leibnitz, bien souvent reproduite : *Eadem sunt, quorum unum potest substitui alteri salva veritate*. Qui ne voit tout ce qu'il y a de vague et d'obscur dans ce *substitui potest* et dans ce *salva veritate?* Je crois bien, comme M. Husserl, qu'il n'y a pas de définition possible de l'égalité en général, mais bien des définitions de l'égalité de tels ou tels êtres mathématiques particuliers; ainsi on peut définir l'égalité de deux segments de droite, ou de deux angles, l'équipollence de deux segments, l'équivalence de deux aires ou de deux volumes, etc. Ces définitions doivent satisfaire à certaines conditions, et peut-être est-ce ici le lieu de faire remarquer que ces conditions ne sont autre chose que ce qu'on appelle les *axiomes relatifs à l'égalité* : ainsi l'égalité doit être réciproque, et deux quantités égales à une troisième doivent être égales entre elles. Au reste, il me paraît que c'est là le rôle des axiomes en Mathématiques, au moins de ceux qui ne sont ni des truismes, ni des postulats : *les axiomes sont des conditions imposées aux définitions*. Quoi qu'il en soit, pour ce qui est du nombre entier, M. Husserl conteste l'utilité d'une définition de l'égalité; la notion de l'égalité étant,

d'après lui, suffisamment éclairée par la notion même de nombre : pourquoi chercher à expliquer que un et un et un est égal à un et un et un? Il critique assez vertement les mathématiciens qui ont cherché à définir l'égalité en nombre de deux collections par la possibilité de faire correspondre, d'une façon univoque, les éléments d'une collection aux éléments de l'autre; et la prétention surtout lui paraît insoutenable de faire sortir en quelque sorte, de cette définition de l'égalité, une définition du nombre, en considérant par exemple une suite-type de collections, comme celle-ci, où chaque collection est formée de traits verticaux

|, ||, |||, ||||, ...,

et en comparant chaque collection possible d'objets à celle de la suite-type qui lui est égale en nombre, d'après la définition précédente. A ce sujet, il prend quelque peu M. Stolz à partie. Je n'ai pas, bien entendu, à prendre ici la défense de M. Stolz, mais, à la réflexion, il ne me paraît pas certain que l'opinion de M. Husserl soit foncièrement distincte de celle qu'il combat.

Pour lui, je l'ai déjà dit, il est inutile de définir l'égalité en nombre de deux collections; tant mieux, s'il en est ainsi; d'autant que, alors, on est dispensé d'examiner cette ennuyeuse question : après avoir vérifié que deux collections sont égales en nombre en faisant correspondre chaque élément de l'une à chaque élément de l'autre, est-on assuré que, en choisissant un autre mode de correspondance, on trouvera encore que les deux collections sont égales en nombre? En d'autres termes, quand on compte

les éléments d'une collection, le résultat est-il indépendant de l'ordre dans lequel on compte les éléments ?

Rien que pour éviter cette question, je serais heureux que M. Husserl eût raison ; mais allons un peu plus loin. Pour lui, cette correspondance n'est qu'une condition nécessaire et suffisante au moyen de laquelle *on peut vérifier* l'égalité en nombre de deux collections, nullement une définition, et encore, pour vérifier cette égalité, est-il plus simple et plus commode de *compter* les deux collections. Sur cette commodité, il n'y a pas de doute, et le commerçant européen qui, pour trafiquer avec quelque sauvage, est obligé de troquer un à un les objets qu'il vend contre ceux qu'il reçoit est assurément du même avis que M. Husserl ; mais cette pratique même de l'échange, usitée chez des peuples sans culture, n'est-elle pas une présomption en faveur de la valeur, et, en quelque sorte, du caractère primitif de cette définition de l'égalité par la correspondance entre les éléments de deux collections, que quelques mathématiciens ont adoptée ? Et n'est-ce pas à cause même de sa culture que M. Husserl n'a pas besoin de définition [1].

Dans la claire idée qu'il se fait de l'égalité, est-il certain qu'une certaine suite-type n'intervienne pas d'une façon quelque peu inconsciente, ainsi que cette correspondance dont il conteste l'utilité ? En disant qu'une collection concrète se compose de quatre éléments, qu'elle est un *Etwas* et un *Etwas* et un *Etwas* et un *Etwas*,

1. Une autre présomption en faveur de cette définition est le parti que M. Cantor en a tiré pour arriver à la notion d'égalité en puissance (*Mächtigkeit*) pour deux ensembles.

n'en fait-il pas correspondre chaque élément à ce mot un *Etwas* ou plutôt à l'idée qu'il se fait d'un *Etwas* ? Outre que, à ce degré d'abstraction que suppose le concept d'une chose quelconque, d'un *Etwas*, il est peut-être difficile de distinguer entre un concept et son signe, il n'importe nullement, pour que la suite-type existe dans l'esprit de M. Husserl, que les éléments de cette suite soient des mots ou des concepts abstraits répétés ; dans l'un ou l'autre cas la correspondance est possible et si chacun des petits traits de M. Stolz

||||

a le même sens que un *Etwas*, si leur rapprochement dans un même groupe figuré a la même signification que la copule *et*, où est la différence entre les deux points de vue[1] ? D'un autre côté, si l'on compte les éléments d'une collection, ne les compte-t-on pas un à un, ne les fait-on pas ainsi correspondre successivement aux mots un, deux, trois, ...? Ne sépare-t-on pas ainsi la collection en collections partielles dont les éléments correspondent successivement au mot *un*, ou à l'idée d'*un*, dans les expressions un, un et un, un et un et un, ...? Et, ainsi, les idées de nombre cardinal et de nombre ordinal ne se recouvrent-elles pas, et si M. von Helmholtz observe que le nom de *nombre* qui correspond à la collection que l'on compte n'est que le nom de nombre qui, au premier point de vue, correspond

1. Au reste, il me semble que M. Husserl s'est aperçu lui-même de la possibilité de présenter les choses de façon que cette différence disparût à peu près (*voir* Chap. VII, p. 129).

au dernier élément compté, qui, au second point de vue, correspond à la dernière collection partielle, laquelle n'est autre que la collection totale, faut-il en conclure que la notion de nombre est radicalement distincte chez M. von Helmholtz et chez M. Husserl ?

Quant à la difficulté dont j'ai parlé au début, l'indépendance du nombre des éléments d'une collection et de l'ordre dans lequel on les compte, difficulté que M. Husserl supprime, je crois bien, avec M. von Helmholtz, qu'elle est d'ordre psychologique plutôt que mathématique : il me semble qu'elle dépend de la façon dont nous nous *représentons*, dont nous sommes peut-être obligés de nous *représenter*, les éléments d'une collection comme distincts : presque invinciblement nous nous les représentons comme séparés dans l'espace, ou comme successifs dans le temps, et c'est à cause de cette représentation que la question se pose, et elle se pose parce que, alors, nous portons notre attention sur ce qui *distingue* les éléments les uns des autres, non sur ce seul fait qu'ils sont distincts, et, comme l'a fait très justement observer M. Husserl, c'est cela seul qui importe. En vérité, quand nous nous représentons une collection, nous n'arrivons guère à supprimer toute différence de rôle entre les éléments de cette collection et c'est cette impuissance de penser à des objets distincts sans penser un peu à ce qui les distingue, c'est cette impuissance qui crée la difficulté.

La première Partie du Livre de M. Husserl se termine par une excellente étude sur les opérations fondamentales de l'Arithmétique et sur leur signification quand on regarde le nombre comme

une collection d'unités, sans recourir aux symboles (systèmes de numération) qui servent à les représenter. Signalons en passant, au point de vue pédagogique, la nécessité [1] de faire une pareille étude, d'où résultent clairement les propriétés fondamentales des opérations, avant de donner la théorie des règles pratiques qui permettent d'effectuer ces opérations dans le système décimal, théorie qui suppose la connaissance de ces propriétés fondamentales.

J'avoue avoir été très étonné de rencontrer dans un esprit aussi philosophique que M. Husserl et aussi bien informé des choses mathématiques une conception singulièrement étroite de l'Arithmétique. M. Husserl, si je l'ai bien compris, la réduit au calcul. D'après lui, pour quelqu'un qui aurait de tous les nombres une conception aussi nette que celle que nous pouvons en avoir pour les nombres deux, trois ou quatre, toute l'Arithmétique se réduirait à des propositions aussi évidentes que celle-ci $2 + 2 = 4$, et la seconde Partie de son Livre est consacrée à développer cette idée que l'Arithmétique est fondée tout entière sur la représentation symbolique des nombres, que ces symboles passent au premier plan, et que l'idée propre de collection d'unités disparaît en quelque sorte. Tout cela, encore une

1. Je suis heureux de me rencontrer ici avec M. Méray, qui, dans un très intéressant article de la *Revue bourguignonne de l'enseignement supérieur* (janvier 1892), a fortement, et dans les meilleurs termes, insisté sur cette nécessité; seulement je dois dire qu'elle est souvent mieux comprise par nos professeurs que ne semble le croire M. Méray : ainsi, en feuilletant des notes prises au lycée par un élève de la classe de *sixième*, j'ai eu le plaisir d'y trouver nettement distinguées la définition théorique de chaque opération et la règle pratique pour trouver, en *chiffres*, le *résultat* de l'opération quand les *données* sont exprimées en *chiffres*.

fois, n'est vrai que du calcul. Aussi bien M. Husserl s'élève-t-il contre la paraphrase (ὁ θεὸς ἀριθμητίζει) que Gauss a faite d'une formule célèbre : pour M. Husserl « ἀριθμητίζειν » est le fait d'un être fini. Nul doute pour ce qui est du calcul. Mais il est probable que Gauss ne se faisait pas de la Divinité l'idée d'un Inaudi monstrueux, ou d'un mathématicien comme celui de je ne sais quel roman de M. Jules Verne, qui passe son temps, dans les situations les plus invraisemblables, à extraire de tête des racines cubiques. La pensée de Gauss était que toutes les vérités mathématiques ne sont que la traduction dans le langage de la Géométrie, de la Mécanique ou de la Physique, d'identités d'Algèbre ou d'Analyse, qui embrassent ainsi les lois les plus diverses de la réalité sensible, qui en sont l'expression la plus abstraite et la plus générale, et qui se résolvent finalement en propriétés numériques, assurément indépendantes de tout système de numération. Pour rester dans le domaine de la pure Arithmétique du nombre entier, ou du moins de ce que l'on entend habituellement par là, les propriétés des nombres premiers ne sont-elles pas entièrement indépendantes de tout système de numération, et la possibilité de concevoir clairement toutes les collections possibles, aussi clairement que les collections de deux ou trois objets, nous aiderait-elle beaucoup à découvrir le théorème de Fermat, ou la loi de réciprocité ? Oui, sans doute, si l'on entend par « concevoir » une vue tellement claire des choses qu'elle en pénètre toutes les propriétés, mais il n'y a assurément aucune de nos conceptions qui soit dans ce cas.

*
* *

La première édition de cette *Étude*[1] remonte à l'année 1895 ; depuis lors, de nombreux et importants travaux ont été publiés sur les fondements logiques de la Géométrie : l'auteur a eu à cœur d'en tenir compte ; il ne faut pas s'étonner si la partie de son Livre qui se rapporte à la Géométrie a plus que doublé ; celle qui concerne la Mécanique a été modifiée moins profondément : M. Lechalas a emprunté à M. Duhem diverses indications d'ordre historique sur les repères auxquels on rapporte les mouvements observés ; il a aussi tiré parti de la communication de M. Painlevé à la Société française de Philosophie sur le rôle du principe de causalité dans le choix de ces repères. Il a discuté les objections de M. Poincaré contre le principe de tout essai de détermination de la Géométrie de notre univers. Enfin, à l'occasion de la critique de l'infini et du continu, il a introduit quelques considérations fondées sur la théorie des ensembles infinis de M. G. Cantor.

En achevant la lecture du Livre de M. Lechalas, je m'étais d'abord résolu à me borner aux indications qui précèdent et qui sont tirées de la préface. C'eût été sage : les gens incompétents qui se mêlent de discuter la doctrine d'un philosophe méritent sans doute, comme le dit Bayle dans un passage qu'a cité l'auteur, d'être « abandonnés ou à leur stupidité, ou à leur mauvaise foi, ou à la force insurmontable de leurs préju-

1. LECHALAS (G.). *Étude sur l'espace et le temps*. Paris, Félix Alcan.

gés », et, s'ils se rendent compte de leur incompétence, ils craignent naturellement d'être traités comme ils le méritent. C'est toutefois M. Lechalas lui-même qui m'a rassuré : il disserte en effet, sans trop d'hésitation, sur la façon dont Dieu connaît les choses ; il ne manquera pas de pardonner à un profane qui se permet de dire quelques mots d'un Chapitre de son Livre, ou plutôt d'un paragraphe de ce Chapitre, qui, dans la Table, est intitulé *Démonstration de la loi du nombre.*

En vertu de cette loi du nombre, à propos de laquelle on a mené grand bruit, il n'y a pas de collections infinies. Renouvier, M. Pillon, M. Evellin, M. Lechalas lui-même ont été ou sont parmi les tenants de cette doctrine. Qu'un philosophe l'admette et la préconise, qu'il s'efforce d'y soumettre sa théorie de l'univers, qu'il s'amuse à en déduire les conséquences logiques ; qu'il trouve parmi ces conséquences, sans qu'aucune le fasse reculer, l'impossibilité d'un espace ou d'un temps infinis, l'impossibilité de la continuité de l'un et de l'autre et du mouvement, je ne veux pas m'en émouvoir ; les métaphysiciens ont trop de plaisir à étonner les gens pour que ceux qui les écoutent ou qui les lisent n'aient pas le droit de se cuirasser contre tout étonnement ; mais qu'il fût possible de donner une *démonstration* de cette loi du nombre, voilà qui m'émerveillait beaucoup. Je ne puis cacher ma déception. La démonstration de M. Lechalas ne convaincra, j'en ai bien peur, que ceux qui croient d'avance à *ce qu'il fallait démontrer.* Elle consiste à supposer réalisés deux ensembles infinis de disques ; sur les disques du premier

ensemble sont inscrits les numéros 1, 2, 3, ... et sur les disques de l'autre les numéros 2, 4, 6, ...; chaque disque du second ensemble est relié par une ficelle rouge au disque de même rang dans le premier ensemble et par une ficelle bleue au disque de ce premier ensemble qui porte le même numéro que lui. « Or, en quelque région de l'ensemble des deux séries que nous nous placions, toujours un élément de la seconde série sera le point de départ d'une ficelle bleue et d'une ficelle rouge, mais les secondes extrémités de ces ficelles présenteront une singularité : tandis que les ficelles rouges aboutiront à tous les disques de la première série, les ficelles bleues n'aboutiront qu'à un disque sur deux. » C'est tout.

Comment un homme aussi subtil et aussi averti que M. Lechalas peut-il voir, dans la singularité qu'il trouve à son assemblage de disques, de ficelles bleues et rouges, une démonstration *per absurdum* de la *loi du nombre?* Il parle un peu plus loin du *tapage insignifiant de notre sensibilité;* mais ne s'est-il pas laissé étourdir par ce tapage. et la *singularité* qu'il signale est-elle autre chose? Nous sommes impuissants à imaginer l'infini, c'est entendu; mais cette impuissance n'empêche pas la justesse de nos raisonnements quand nous prenons les précautions qu'il faut. Chacun de ceux qui étudient les Mathématiques est gêné de temps en temps par des raisonnements sur l'infini qui ne s'accordent pas avec ses intuitions habituelles. Je croirais volontiers que les uns et les autres ne sont pas choqués de la même façon par les mêmes faits mathématiques : voilà un beau sujet d'en-

quête. Les ficelles bleues et rouges, qui choquent tant M. Lechalas, ne me gênent en aucune façon ; mais je suis très scandalisé par ces points d'abscisses rationnelles qui sont aussi rapprochés qu'on veut de n'importe quel point de l'intervalle (0, 1) et qu'on peut entourer chacun d'un petit segment, sans que l'ensemble de tous ces segments recouvre l'intervalle. J'ai rencontré des gens qui ne partageaient pas du tout mon ahurissement. Peu importe, je suis très convaincu de la légitimité du raisonnement. Un bon raisonnement, bien juste, s'impose : l'intuition garde quelque chose d'individuel et de subjectif.

Au reste, M. Lechalas ne rejette pas tous les raisonnements sur l'infini : il admet et reproduit bon nombre de ceux que M. Cantor a introduits dans la Science ; il raisonne comme un autre sur l'infini, mais il ne veut pas du tout que l'infini soit réalisé. S'il y a dans la notion de l'infini une contradiction interne, cette contradiction ôte toute valeur à tout raisonnement où intervient la notion de l'infini. Ce n'est pas, semble-t-il, dans l'idée même de l'infini, mais dans la réalisation de cette idée que M. Lechalas voit une contradiction ; il y a là une conception du réel qui m'échappe. Pourquoi ce qui n'est pas contradictoire ne pourrait-il être réalisé ?

C'est l'expérience qui atteint le réel, non le raisonnement déductif; celui-ci nous apprend que telle conséquence résulte de telle hypothèse, que cette hypothèse-ci est contradictoire avec celle-là ; en outre, il nous permet de mettre de l'ordre dans nos connaissances expérimentales et dans les inductions dont elles sont le point de départ ; mais il ne peut, à lui seul, créer ou

anéantir rien qui existe. L'essai de démonstration que donne M. Lechalas n'est, à ce qu'il me semble, qu'une image vague ; mais un raisonnement qui prétendrait aboutir à la même conclusion, sans faire éclater quelque contradiction dans la notion de collection infinie, me causerait plus de défiance encore que la *preuve ontologique.* Ni l'expérience, ni le raisonnement, n'apporteront aucune réponse à cette question : l'infini est-il réalisé dans le monde extérieur ? La réponse est affaire d'opinion ou de croyance. Mais ceux qui, comme M. Lechalas (si je ne me trompe), sont bien assurés que nous ne connaîtrons jamais que nos propres états de conscience, doivent-ils se mettre beaucoup en peine de cette réponse, et comment jugent-ils qu'une de nos idées, si elle n'est pas contradictoire avec elle-même, peut être contradictoire avec l'existence, et sur quoi donc s'appuie la distinction qu'ils font entre l'idéal et le réel ?

2. — Géométrie

Le sujet traité par M. Holder[1] est plutôt d'ordre philosophique que d'ordre scientifique ; il ne peut toutefois manquer d'intéresser vivement les nombreux géomètres qui sont quelque peu philosophes. L'auteur étudie d'abord ces concepts qui sont la matière même de la Géométrie, les axiomes ou postulats qui permettent de raisonner sur ces concepts. Il oppose à la doctrine de Kant qui place dans l'intuition « pure » la source de toutes nos connaissances géométriques, la doc-

1. Holder (O.). *Anschauung und Denken in der Geometrie. Bulletin des Sciences mathématiques.* Juin 1900.

trine empirique, vers laquelle il incline manifestement. Ce n'est pas ici le lieu de chercher si la théorie de l'évolution et de l'hérédité ne permet pas d'établir un lien entre ces doctrines opposées et d'autre part si l'intuition, même pure, n'est pas très variable d'un individu à l'autre et ne se modifie pas profondément par l'habitude de la réflexion géométrique. Est-elle la même chez celui qui n'a l'habitude que de la Géométrie euclidienne ou chez celui qui s'est familiarisé avec les concepts et les méthodes de la Géométrie non-euclidienne? chez les Géomètres d'un siècle et ceux d'un autre siècle? Quoi qu'il en soit, M. Holder s'occupe ensuite des démonstrations géométriques et se livre à une analyse très pénétrante de la démonstration classique du théorème sur la somme des angles d'un triangle, en admettant le postulatum d'Euclide. Cette démonstration ne lui paraît pas procéder suivant les règles de la logique classique; l'*intuition* y intervient à chaque instant, dans la façon même dont on voit la figure; c'est cette vue elle-même qui permet d'appliquer les théorèmes ou les postulats, en sorte que les déductions géométriques seraient une suite d'expériences idéales (*Gedanken-experiment*). Souvent l'intuition permet de porter un jugement immédiat; telle est cette affirmation : deux bissectrices d'un triangle se coupent en un point intérieur au triangle; il faut au contraire un raisonnement pour prouver que la troisième bissectrice passe par ce point. M. Holder estime aussi que le raisonnement géométrique, fait sur une figure spéciale, est dans une certaine mesure un raisonnement par analogie. Souvent, quelque partie d'une démonstration, regardée comme

intuitive, repose sur quelque axiome qui peut être formulé, mais que l'on néglige d'habitude : tel est l'axiome signalé par M. Hilbert (*Axiom der Anordnung*) : Si A, B, C, D sont des points d'une droite, si B est entre A et D, C entre B et D, B est entre A et C, et C est entre A et D. Le premier théorème sur l'égalité des triangles n'est pas susceptible d'une démonstration proprement dite, il a le caractère d'un axiome.

Pour reconnaître celles des propositions de la Géométrie qui ont un tel caractère, pour éviter d'avoir recours à l'intuition dans le courant d'une démonstration, sans le savoir, il faudrait ne plus raisonner sur des figures, mais sur de purs symboles qui représenteraient les éléments géométriques, comme ils représentent les nombres dans l'Algèbre. Les conclusions ainsi obtenues, même si elles ne sont pas d'accord avec l'intuition, n'en sont pas moins les conclusions certaines des suppositions d'où on les a tirées. Cette méthode est très différente de la méthode d'invention ordinairement suivie en Géométrie, méthode où l'intuition, l'analogie, l'observation, l'induction jouent un rôle essentiel. Tout cela est incontestable ; il me semble toutefois qu'une autre question se pose. Sans doute le seul moyen d'éliminer l'intuition des raisonnements géométriques est de raisonner sur de purs symboles, soit que l'on crée, comme le veut par exemple M. Peano, un symbolisme spécial, soit que l'on raisonne, comme ont fait quelques-uns des géomètres qui ont obteuu des résultats essentiels dans la science de l'espace, avec les symboles de l'analyse, en utilisant les ressources de l'analyse ; de cette façon on est assuré que les conclusions sont identiques aux

prémisses, qu'elles ne sont qu'une transformation : les données seules restent soumises à la critique philosophique. Si cette méthode est la seule qui soit sûre, il n'en résulte pas qu'elle soit la seule possible et ceux qui estiment que l'intuition n'est que le résultat d'une longue habitude, peut-être d'une habitude ancestrale, sont enclins à se demander si l'intuition ne peut se modifier, chez les individus eux-mêmes, par les habitudes auxquelles ils se soumettent, et si cette intuition *acquise* ne peut permettre à quelques géomètres de poursuivre hardiment et utilement leurs recherches dans un domaine soumis à d'autres lois que l'espace ordinaire, tout en conservant les habitudes du raisonnement géométrique. Au kantien qui demandera ce qu'est une « intuition acquise », je ne vois pas d'autre réponse à faire que de demander en retour ce qu'est une intuition « pure ». Les termes philosophiques ne peuvent jamais être entendus qu'à demi.

*
* *

Pendant que les uns s'efforcent de scruter les axiomes de la Géométrie, d'en fixer l'indépendance ou l'interdépendance, et s'appliquent à ne raisonner que sur des symboles abstraits, pour ne permettre à aucune intuition spatiale de pénétrer subrepticement dans leurs raisonnements, que d'autres poursuivent avec patience l'étrange construction de quelqu'une de ces Géométries où l'on a laissé tomber l'un ou l'autre des axiomes de la Géométrie ordinaire, et s'efforcent de lui conférer une sorte de légitimité à l'existence logique, non seulement par la cohérence même

des déductions, mais par une correspondance entre l'espace imaginaire où ils se meuvent, *sic chimœra bombynans in vacuo*, et cet espace auquel nous avons l'habitude d'attribuer quelque réalité, M. de Freycinet, dans un livre[1] qui n'intéressera pas moins les philosophes que les mathématiciens, et dont le style élégant, distingué et modéré charmera les uns et les autres, se plaît à rappeler l'origine expérimentale des concepts géométriques. Ce n'est pas que l'éminent penseur condamne les recherches auxquelles je viens de faire allusion; pour le faire, il respecte trop la science et la liberté des savants, mais ces géométries, qui portent toutes le nom d'un grand mathématicien affublé d'une négation par devant, ne sont pas pour lui de la géométrie, tout court : en quoi, il est facile de se ranger à son avis.

Que l'expérience, ou l'intuition, aient une large part dans la formation des concepts fondamentaux de la Géométrie, c'est sans doute ce que l'on ne contestera pas à M. de Freycinet. Peut-être conviendrait-il de distinguer l'une de l'autre, et d'accorder aussi que l'intuition, si même elle est impossible sans aucune expérience, contient un élément *a priori*, une prédisposition de notre esprit, logiquement antérieure à notre expérience.

Ce n'est pas ici le lieu d'agiter (sans la résoudre) la question de savoir si cette prédisposition, chez chacun de nous, peut provenir d'une longue suite d'expériences ancestrales, déposées dans les individus, lentement accumulées dans la

1. Freycinet. *De l'expérience en géométrie.*

race : nous naissons tels quels, avec des puissances et des tendances que notre expérience à nous (si nous avons quelque individualité), n'a pas formées et qui ne se révéleront à nous-mêmes que par notre propre expérience. Sans doute, nous rencontrerons, dans le monde extérieur, des objets qui éveillent en nous les idées de ligne droite, de point ou de plan; et, si nous étions enfermés en nous-mêmes, ces idées n'auraient pu naître en nous ; mais combien ces concepts, dans leur pureté géométrique, sont éloignés des objets réels, à propos desquels ils se sont éveillés! Cette pureté même ne leur permet aucune réalité, en dehors de notre pensée; nous n'arrivons à les construire qu'en faisant abstraction des conditions de la réalité extérieure. Quand je réduis, par la pensée, le point matériel à n'être plus qu'un point géométrique, je lui refuse par cela même la possibilité d'éveiller en moi une sensation.

Si les expériences sur lesquelles se fondent les concepts de la Géométrie sont innombrables, il faut reconnaître aussi que la grossièreté de ces expériences s'oppose à l'absolue précision de ces concepts; on ne s'est jamais avisé d'installer des expériences de précision, qui se rapportent, ni aux concepts fondamentaux de la Géométrie, ni à leurs conséquences lointaines ; je ne répondrais pas, s'il tombait entre les mains d'un médecin aliéniste, du sort d'un physicien qui poursuivrait des mesures délicates pour reconnaître si le carré de l'hypoténuse d'un triangle rectangle est bien égal à la somme des carrés des autres côtés; et si ce physicien venait nous annoncer que la différence entre les résultats de l'observation et

du calcul est supérieure aux erreurs possibles d'expérience, on le regarderait avec un sourire attristé et l'on ne s'aviserait pas de voir, dans la différence annoncée, l'influence maligne de cette contingence, qu'il faut pourtant bien admettre dans les lois que nous tirons de l'expérience. Au contraire, on est bien aise de savoir que MM. Sanford et Ray, ayant effectué dans des vases fermés des opérations chimiques, ont trouvé qu'aucune différence de poids plus grande que 1/2.500.000 n'est produite par la double décomposition réalisée [1].

Je crois bien que depuis 1897, époque à laquelle remontent les expériencas de MM. Sanford et Ray, on a continué à faire des expériences dans le même sens. En supposant, comme je le souhaite bien vivement, qu'elles donnent toujours le même résultat, combien, dans l'hypothèse évolutionniste, faudra-t-il de générations de physiciens, pour que ceux-ci, en viennent à attribuer au principe de la conservation de la masse la même évidence qu'aux théorèmes de la Géométrie? Malgré tout; il est difficile de se débarrasser des formules de Kant, ou même de Leibnitz, et tout en reconnaissant la part de l'expérience, de ne pas avouer que nous sommes, nous-mêmes, pour beaucoup dans notre science, qui n'est pas une simple somme de faits expérimentaux.

Si le livre de M. de Freycinet ramène notre pensée vers des problèmes philosophiques qu'il sera toujours utile de méditer, puisqu'on n'arrivera sans doute jamais à les résoudre, il ne donne

1. Perrin. *Traité de chimie physique.*

pas moins à réfléchir sur la façon dont il convient d'enseigner la Géométrie. Bien que l'auteur ne semble nullement s'être proposé de traiter ce sujet, je crois qu'on pourrait tirer grand parti de ses ingénieuses observations.

Pour ce qui concerne l'enseignement à donner à des commençants, la conclusion à tirer de cette critique à laquelle ont été soumis les axiomes et les postulats de la Géométrie semble évidente. D'une part, il est impossible de fonder un enseignement purement logique de la Géométrie sur un très petit nombre d'axiomes très clairs, immédiatement saisis dans leur forme abstraite ; d'autre part, on risquerait d'affoler les enfants en leur débitant une liste complète (ou prétendue telle) de ces axiomes, et l'on y parviendrait sûrement en discutant devant eux l'indépendance ou l'interdépendance de ces axiomes. Si tout cela est certain, la recherche d'une grande rigueur logique dans un premier enseignement des éléments de la Géométrie apparaît comme inutile, et il se pourrait bien que cette inutilité fût vaguement sentie par les écoliers, qui se demandent de quoi on leur parle, et où on les mène, et qui trouvent les énoncés beaucoup plus clairs que les démonstrations. Il ne serait peut-être pas difficile à des maîtres exercés, qui savent observer ceux qui leur sont confiés, après avoir habitué leurs élèves à la connaissance des formes géométriques, de démêler celles des propositions du début de la Géométrie qu'on peut, sans inconvénient, regarder comme intuitives ; je n'aurais aucune peine, pour ma part, à accorder à M. de Freycinet qu'on peut ranger parmi celles-là l'équidistance de deux parallèles, et je

crois même qu'un enfant, habitué à manier la règle et l'équerre, accorderait assez volontiers à son maître l'égalité des angles correspondants. De cette façon, on amènerait les élèves à comprendre la nature des problèmes géométriques, à rapporter les uns à l'art du dessin, les autres à l'objet primitif de la Géométrie, à la mesure des aires et des volumes. Peut-être faudrait-il reprendre quelque chose de la méthode de ces hindous, qui se contentaient, pour une démonstration, du mot *vois* placé au-dessous d'une figure. Il ne serait pas impossible de montrer que, à procéder ainsi, on ne va pas bien loin, de faire voir par quelques exemples amusants, que l'intuition peut tromper, d'éveiller, à l'heure convenable, des inquiétudes, de faire désirer aux élèves une première revision des principes, et la fixation d'une liste, non pas encore des axiomes, mais de propositions fondamentales, dont le sens serait bien compris, dont les énoncés seraient sus par cœur, sur lesquelles, seules, désormais, il serait permis de s'appuyer pour aller plus loin. Rattacher ces propositions aux axiomes est l'œuvre d'esprits plus formés, déja aiguisés par l'habitude du raisonnement mathématique ; quant à la critique des axiomes, son intérêt est considérable sans doute, mais elle ne regarde que ceux qui aiment la science pour elle-même et je crois bien que la passion pour la Géométrie ne s'éveille pas chez les jeunes esprits à la lecture des premières pages des meilleurs Traités.

Je demande pardon au lecteur de l'avoir moins entretenu du livre de M. de Freycinet que des réflexions que sa lecture m'a suggérées ; aussi bien ce livre se recommande-t-il assez par le

nom de son auteur, et les qualités de l'exposition risquent-elles de désespérer ceux qui s'efforceraient de la résumer. Et puis, le but de pareils livres n'est-il pas de faire réfléchir ceux qui les lisent ?

3. — Mécanique

On ne peut lire un livre de M. de Freycinet sans admirer d'abord l'écrivain, la limpidité du style, et cette simplicité dans l'élégance qui, chez les riches, est la marque du goût. Dans ce livre ci[1], qui touche aux points les plus difficiles de la mécanique il n'y a pas une formule, pas un symbole analytique; les théorèmes et les principes sont dépouillés de tout cet appareil mathématique, dont on se contente parfois, sans se donner la peine de regarder ce qu'il y a dessous; les mathématiciens sont si habitués à leurs symboles et s'amusent si volontiers au jeu de ces symboles, qu'il faut peut-être leur enlever leurs jouets pour les forcer à penser. Forcer le lecteur à penser aux choses, c'est là sans doute ce qu'a voulu M. de Freycinet, et sa modestie semble excessive, lorsqu'il dit, à la fin de son livre, qu'il s'est seulement efforcé de dégager les abords de la Mécanique rationnelle « et d'assurer les premiers pas de ceux qui voudraient pénétrer à l'intérieur de l'édifice. »

C'est parmi ceux qui sont à l'intérieur de l'édifice, qui sont curieux de savoir comment ils y sont entrés, et si le chemin qu'ils ont suivi était

1. Freycinet (C. de). — *Sur les principes de la Mécanique rationnelle.*

bon, que M. de Freycinet trouvera sans doute le plus de lecteurs.

Quand on a affaire à un esprit aussi lucide que le sien, à un écrivain qui dit exactement ce qu'il veut dire, ni plus ni moins, il est quelque peu dangereux de prétendre lire entre les lignes et de prêter à l'auteur des opinions qu'il n'a peut-être pas, ou dont il n'accepterait pas l'expression. Il semble bien, toutefois, que M. de Freycinet n'ait pas de sympathie pour l'école de Mathématiciens ou de Logiciens dont l'idéal est de placer au début de chaque branche de Mathématiques une « table des idées premières », des définitions précises, des postulats dont on ait constaté l'indépendance et qui soient en nombre suffisant, puis de constituer le reste de la science avec de purs raisonnements logiques. Ce n'est peut-être pas à ceux qui poussent le radicalisme aussi loin, mais bien à ceux qui ont quelques tendances de ce côté, voire modérées et timides, que s'adressent les pages suivantes de la préface :

« A mon avis, ces voies nouvelles ne sont pas sûres, et en tout cas elles ne sont pas favorables à la découverte des lois naturelles. Je crois prudent de m'en tenir à la tradition des Galilée, des Newton, des d'Alembert, des Laplace, des Lagrange ; et si quelque changement doit être apporté à des méthodes, naguère réputées classiques, c'est plutôt, selon moi, pour en accentuer le caractère expérimental et pour mettre davantage en relief les données physiques qui leur servent de bases. Sans doute la Mécanique ainsi exposée présente « un mélange » de calcul et d'observation « avec quelque peu d'anthopomorphisme ». Mais quelle est la branche de nos connaissances qui échappe à ce dernier reproche ? Toute science ne porte-t-elle pas l'empreinte de nos concepts et, quand elle sort de la pure logique, l'empreinte aussi de nos sensations vis-à-vis du monde extérieur ? Sa fécondité et sa certitude

ne sont-elles pas alors en raison de son intime contact avec la nature et ne devient-elle pas stérile à mesure qu'elle s'en éloigne ?

« J'ai voulu, dans les pages qui suivent, reprendre précisément la méthode que certains inclinent à délaisser. Loin d'en atténuer le prétendu défaut, je l'ai délibérément accru en donnant plus de place aux considérations empiriques. Le « mélange » signalé comme un manque d'unité n'en sera que plus apparent ; j'espère toutefois qu'il ne passera pas pour de la confusion. Car, au fond, les deux parties, abstraite et concrète, sont parfaitement distinctes.

« Celle-ci sert de support à celle-là. Les données expérimentales précèdent et motivent les théories analytiques ; elles les maintiennent dans la région du réel, hors de laquelle les plus brillants exercices de calcul sont décevants. »

Que la science puisse se développer sans que les concepts qui sont à la base de cette science aient été l'objet d'une critique sévère, c'est ce que l'histoire met hors de doute ; il est même certain qu'on ne revient sur les concepts, pour les étudier, les distinguer, les débarrasser de ce qu'ils ont d'inutile, que lorsque la science est déjà très avancée ; c'est à la lumière de la science elle-même qu'on en peut scruter les principes : vaudrait-il mieux ne jamais s'arrêter à cette critique, s'efforcer d'aller toujours en avant et accumuler plus de vérités nouvelles ? Sans doute, il ne faudrait pas faire dire cela à M. de Freycinet, puisque, après tout, son livre même est, d'un bout à l'autre, la preuve de l'intérêt qu'il attache à l'étude des principes ; mais il est vrai que l'organisation d'une science est autre chose que son accroissement. Quelques-uns regrettent cet appauvrissement des concepts qui résulte de leur critique ; rien n'est plus riche que l'intuition : mais cette richesse est confuse et cachée : il faut

la découvrir, et l'on ne sait comment l'utiliser. Rien ne semble plus pauvre que les concepts qui sont à la base de la Géométrie, si ce n'est ceux qui sont à la base de l'Analyse : toute la richesse est dans le développement logique; est-ce une richesse bien solide ? N'est-ce pas plutôt un rêve de richesse si elle ne consiste qu'en formules abstraites, en signes conventionnels, sous lesquels il n'y a aucune réalité ? Il est permis, en tout cas, de priser davantage les spéculations qui s'adaptent aux choses et nous permettent de mieux les connaître, et, d'ailleurs, il est certain que l'étude des problèmes réels a singulièrement contribué au développement de la science pure. D'un autre côté, l'enseignement d'une science logiquement constituée ne peut s'adresser qu'à des esprits très mûris par cette science même : il ne convient assurément pas, si l'on en pousse la rigueur jusqu'au bout, à des gens qui n'ont pas la longue habitude des abstractions, qui ne sont pas accoutumés à respirer un air raréfié; ceux qui enseignent la Mécanique rationnelle, en particulier, ont, d'ordinaire, le souci de donner à leurs auditeurs le sens des problèmes physiques et de ne pas perdre, eux non plus, ce « contact avec la nature » que recommande M. de Freycinet : j'en trouverais la preuve, s'il était besoin de la chercher, dans le soin et le détail avec lesquels sont définies les unités pratiques de mesure dans les traités récents de Mécanique.

Malgré tout, il est dans la nature d'une science de s'organiser, de se subdiviser en parties dont chacune se différencie naturellement par les concepts et les postulats qui leur sont propres, prétend réduire les uns et les autres au mini-

mum et ne s'appuyer que sur ce qui est à elle; la Mécanique s'est subdivisée en Statique, Cinématique, Dynamique; la Statique et la Cinématique ont des parties purement géométriques; la Dynamique a des parties purement analytiques, où l'on étudie certains types d'équations différentielles. Des notions plus ou moins confuses de force, de mouvement, de matière sont sortis des éléments géométriques, numériques, analytiques sur lesquels on spécule sans penser ni à la force, ni au mouvement, ni à la matière : ces diverses parties se prêtent un mutuel appui, et c'est leur ensemble seul qui constitue la Mécanique rationnelle; elles n'en sont pas moins déjà séparées, et se sépareront davantage les unes des autres et continueront à se subdiviser. Cette division de la Science en parties correspond à une division des concepts et des postulats, qui tend à préciser et à appauvrir les premiers, à mieux distinguer les seconds, et à rapprocher la Science de l'idéal des purs logiciens. C'est un mouvement inévitable par lequel, toutefois, il convient de ne pas se laisser entraîner trop vite : il est même désirable que des voix autorisées viennent de temps en temps en montrer les inconvénients ou les dangers.

Si même cet idéal des logiciens était atteint, si chaque livre qui traite d'une partie des Mathématiques contenait au début la « table des idées premières », la suite des définitions et des postulats indispensables, la critique philosophique et historique aurait encore à s'exercer sur ces idées premières et sur ces postulats, à en discuter l'origine et la formation; pour ce qui concerne la Mécanique, il est hors de doute que l'ex-

périence a contribué pour une très grande part à l'une et à l'autre. Les livres comme celui de M. de Freycinet, auront donc toujours leur place. Il est même permis de croire que, pour ce qui concerne les principes, le rôle de l'expérience est loin d'être épuisé, si, comme le veut M. de Freycinet, on fait rentrer le principe de l'équivalence dans les lois fondamentales de la Mécanique rationnelle : d'autres principes du même genre pourront s'ajouter à celui-là.

Quoi qu'il en soit, en insistant sur le caractère expérimental des données de la Mécanique, M. de Freycinet ne va pas à l'encontre du mouvement dont je parlais tout à l'heure; mais ses fines analyses contribueront sur plus d'un point à détruire la fausse évidence sous laquelle on est parvenu quelquefois à cacher ces données, grâce à des raisonnements dont on ne sait pas bien ni s'ils sont *a priori*, ni sur quoi ils s'appuient. Il est bon de reléguer ces raisonnements-là qui sentent la Métaphysique, dans l'histoire; qu'on leur y fasse une place honorable, puisqu'ils ont été utiles à la constitution de la Mécanique; ceux même qui croient que le monde extérieur nous est donné, que nous sommes incapables de le construire avec des vérités soi-disant nécessaires et de prétendues évidences métaphysiques, ne s'en plaindront pas.

M. de Freycinet examine successivement les notions essentielles de la Mécanique, mouvement, vitesse, accélération, force, masse, etc., et les principes fondamentaux de cette science.

Il passe rapidement sur les notions d'espace et de temps, qui interviennent dans la notion du mouvement; à vrai dire, la critique de la notion

d'espace appartient plutôt à la Géométrie qu'à la Mécanique. Toutefois, il ne pouvait ne pas s'arrêter un instant sur la question du mouvement relatif et du mouvement absolu, dont il admet la notion. Il est vrai qu'on ne trouve rien à répondre à ceux qui soutiennent que, pour qu'il y ait une Mécanique rationnelle, il faut bien qu'il y ait un système de repères et une façon de mesurer le temps, tels que les lois de cette Mécanique soient vraies.

« La première origine de la notion de force se trouve sans conteste, dans nos impressions personnelles. Bien avant que l'homme eût créé une science des forces et se fût élevé dans la sphère des abstractions, il avait acquis, par sa propre expérience, le sentiment très net d'un effort à déployer pour écarter les obstacles ou pour déplacer les corps. Soit qu'il exerçât une pression sur quelque objet fixe, soit qu'il essayât de vaincre des frottements ou la pesanteur, il était amené à développer une contraction musculaire, à *faire effort* pour atteindre son but. Tel est l'acte spécial et bien défini par lequel l'homme prend conscience de sa force et des effets qu'il en peut attendre. Aucun argument ne saurait prévaloir contre ce fait; aucune interprétation ne saurait enlever à la force ainsi conçue et ressentie son caractère nettement concret. Elle n'est point une abstraction, un être de raison, mais quelque chose de réel et d'efficace dont nous portons en nous un type certain. »

Sans doute, et l'on ne saurait mieux dire, mais qu'il y a loin de la sensation musculaire à ce *vecteur* qui, pour le mathématicien, traduit la force! En particulier, la comparaison entre deux forces, l'égalité, l'addition de deux forces comportent bien des difficultés que le savant auteur ne cherche pas à dissimuler. Pour éclaircir ces notions, on imagine d'ordinaire que l'on ait à sa disposition de petites forces que l'on accroche ou

que l'on décroche à volonté : le moins que l'on pourrait dire sur les mécanismes plus ou moins complexes que l'on invente pour réaliser ces opérations est que la théorie de ces mécanismes impliquerait cette Mécanique rationnelle dont il s'agit d'établir les premières notions. Au fond, on s'efforce de rattacher, tant bien que mal, les notions que l'on veut introduire dans l'esprit des commençants à des phénomènes avec lesquels on suppose qu'ils sont familiers; il est d'ailleurs possible que des considérations de ce genre soient intervenus historiquement dans le travail plus ou moins conscient qui a abouti à substituer à la notion vague de force un vecteur ayant, pour ce qui concerne le mouvement, des propriétés définies.

« ..... Ainsi le corps a une double propriété : la *mobilité*, en vertu de laquelle, s'il est libre, il cède au moindre effort; et cette autre propriété d'après laquelle il réclame des efforts différents, selon sa nature et ses dimensions, pour prendre le même mouvement. Cette seconde propriété est déterminée par ce que l'on appelle la *masse*. Ainsi, la masse des corps se reconnaît à la grandeur des forces qui leur font prendre le même mouvement.

« ... Si donc nous avions le moyen d'évaluer immédiatement l'intensité de la force ou le nombre de kilogrammes nécessaires pour imprimer à un corps un mouvement convenu, nous saurions, par là même, mesurer sa masse. D'une manière générale, les masses de tous les corps seraient proportionnelles aux grandeurs des forces ainsi enregistrées...

« Les physiciens ont constaté que tous les corps sans exception, depuis le plus léger duvet jusqu'au bloc de plomb ou de platine, abandonnés à eux-mêmes dans le vide, prennent le même mouvement : partis en même temps de la même hauteur, ils arrivent ensemble au bas de la chute. Les forces qui les sollicitent, c'est-à-dire leurs poids, sont donc, par définition, proportionnelles à leurs

masses. Dès lors, au lieu de mouvoir les corps à l'aide d'appareils spéciaux, pour en évaluer la masse, il suffit de les peser. »

Au fond, cela revient à dire que la masse est définie au moyen de la balance, et c'est sans doute ce que l'on peut en dire de plus clair et de plus sûr, puisque, après tout, c'est au moyen de la balance qu'on mesure effectivement les masses. Sans doute, ici encore, on pourrait dire que la balance est un appareil compliqué, dont la théorie implique une bonne partie de la Mécanique rationnelle; c'est même cette Mécanique rationnelle qui fournit le moyen de construire des balances qui soient justes et sensibles : quoiqu'une partie des difficultés soit supprimée en ne considérant, comme le veulent les physiciens, que des doubles pesées, il n'est pas *logique* de se servir de la balance pour définir une notion fondamentale de la Mécanique. De quelque côté que l'on se retourne, on se heurtera toujours à l'impossibilité de construire le monde extérieur avec la pure logique. D'ailleurs, à chacune des notions fondamentales de la Mécanique ne correspond pas *une* expérience qui permette de la définir : il y a une infinité d'expériences dont la Mécanique explique et coordonne les résultats d'une façon admirable, et c'est, comme on l'a dit, la cohérence de toute la science, nullement l'évidence de ses principes, qui en garantit la valeur.

M. de Freycinet insiste avec raison sur l'impossibilité où l'on est de prévoir logiquement le rôle de la masse, de ce coefficient numérique attaché à la matière, que la balance nous permet d'évaluer : pour les corps qui sont à notre portée, il s'efforce de faire pénétrer dans l'esprit de

son lecteur cet étonnement devant les choses que l'habitude n'arrive pas à dissiper chez le véritable philosophe. Pour me borner à la façon même dont M. de Freycinet introduit la notion de masse, était-il possible de prévoir logiquement ce fait que le temps de chute d'un corps est indépendant de sa masse ?

Je passe sur les concepts de quantité d'action, de travail, de masse vive, d'énergie, etc., que M. de Freycinet examine ensuite et à propos desquels il est obligé d'anticiper un peu sur ces *lois générales du mouvement* auxquelles il consacre le second chapitre de son livre et qu'il range dans l'ordre suivant : loi d'égalité entre l'action et la réaction; loi d'inertie; loi de l'indépendance d'action des forces ou de l'indépendance des mouvements; loi de l'équivalence mécanique de la chaleur.

Il déduit de la seconde et de la troisième loi la relation fondamentale de la Mécanique $F = m\gamma$ et la règle du parallélogramme. Or on peut, inversement, par intégration, déduire de ces deux dernières propositions et la loi de l'inertie et la loi de l'indépendance des effets des forces. Je me demande en quoi il est préférable d'adopter un ordre plutôt qu'un autre, et de partir d'un système de lois plutôt que d'un autre. La façon de procéder qu'a adoptée M. de Freycinet est plus conforme aux habitudes et à l'histoire : est-elle plus claire? On dira peut-être, comme on l'a dit à propos d'autres sujets, que l'expérience ne peut fournir des relations différentielles, mais bien des relations entre des intégrales, d'où nous déduisons les relations différentielles : dans le cas actuel, cette observation n'est guère con-

cluante, car ni la loi de l'inertie, ni celle de l'indépendance des actions des forces ne sont susceptibles d'une démonstration expérimentale directe. S'il n'y a donc dans l'espèce, ni évidence *a priori*, ni vérification expérimentale directe, il semble très légitime de se décider, dans le choix, par la simplicité et la clarté de l'énoncé ; or la relation $F = m\gamma$ et la règle du parallélogramme sont, à ce qu'il me semble, des énoncés plus clairs que le principe de l'indépendance des effets des forces et du mouvement antérieurement acquis : celui-ci, si je ne me trompe, n'a de sens que si les forces sont données en fonction du temps, et ne se prête à des déductions faciles que si les forces sont constantes : M. de Freycinet a lui-même signalé ce dernier point.

*
* *

S'il est vrai que les meilleurs livres sont ceux qui donnent le plus à réfléchir, il faut assurément féliciter M. Andrade d'avoir publié ces *Leçons de Mécanique physique*[1]. Ceux même dont M. Andrade choque les habitudes reconnaîtront qu'il y a dans son Livre d'excellentes parties, par exemple ces premiers Chapitres, où il retrace à grands traits l'histoire de l'Astronomie depuis Képler jusqu'à Newton, et où il montre l'influence décisive que les succès de l'Astronomie ont eue sur la constitution de la Mécanique. Que la définition de la force, regardée comme le produit de l'accélération par la masse, dépende d'une part de l'horloge qui sert à mesurer ou à

1. ANDRADE (J.). Leçons de Mécanique physique.

définir le temps, d'autre part du repère auquel on rapporte le mobile, c'est encore là une remarque très essentielle et que l'on ne saurait trop répéter. Il importe assurément de démêler la variation qu'introduit dans la force et le changement d'horloge et le changement de repère; c'est ce qui permet de faire un simple changement de variable, pour le temps, et le théorème de Coriolis, pour le repère. Si, sur un mobile dont le mouvement est rapporté à un repère déterminé, une nouvelle force vient à agir à un moment donné, la variation géométrique de l'accélération qui résultera de cette action est indépendante du repère, comme le montre le théorème de Coriolis, et ne dépend pas non plus de l'horloge, sauf un coefficient numérique qui n'influe pas sur sa direction. A cause du caractère invariant de cette variation géométrique. M. Andrade veut, après Reech, qu'on la prenne pour point de départ de la définition de la force. Cela, semble-t-il, entraînerait quelques complications; mais la remarque précédente n'en gardera pas moins toute son importance, aux yeux même de ceux qui se résolvent à regarder la force comme quelque chose de relatif.

Si un problème de Mécanique, pour une certaine horloge et un certain repère, conduit à des équations différentielles où les accélérations s'expriment uniquement en fonction des points mobiles, ces équations perdront, en général, leur caractère quand on rapportera le temps à une autre horloge et le mouvement à un autre repère. Quelle que soit encore l'importance de cette remarque, elle appelle une observation. S'il y a une horloge et un repère qui donnent aux

équations la forme simple que je viens de dire, on ne manquera pas de les choisir, de regarder l'horloge comme marquant le temps absolu et le repère comme l'espace absolu. M. Andrade a développé lui-même cette idée à propos du principe des aires. Cet *absolu* ne sera bien entendu, qu'un *absolu relatif à nous*, à notre connaissance expérimentale du monde des phénomènes ; mais il sera la base la plus solide de cette connaissance. L'existence d'une telle horloge et d'un tel repère, pour tous les problèmes réels de la Mécanique est assurément une hypothèse ; le principe de l'égalité de l'action et de la réaction est aussi une hypothèse, mais il n'a pu entrer un seul instant dans la pensée de M. Andrade de contester l'extraordinaire succès de ces hypothèses et l'ordre qu'elles ont apporté dans notre connaissance du monde extérieur. Alors pourquoi dire que le principe de l'inertie est inutile ? Inutile à quoi ? A fonder la Mécanique ? Mais quelle mécanique ? Sans doute on peut, sans le faire intervenir, écrire des équations différentielles, des relations entre les accélérations, les vitesses et les coordonnées des points mobiles ; dira-t-on que ces équations appartiennent à la Mécanique, et surtout à la Mécanique physique ? N'est-ce pas ce principe qui donne aux équations de la Mécanique leur caractère d'équations de la Mécanique ? Peut-on se passer d'hypothèses pour mettre les problèmes réels en équations ? Quel autre garant les hypothèses ont-elles que le succès et quelle autre hypothèse a-t-elle eu plus de succès que celle-là ?

Pour définir la force, l'accélération ne suffit pas, il faut encore définir la *masse*, le coeffi-

cient numérique attaché à la matière. M. Andrade veut en donner aussi une définition cinématique, indépendante des repères du mouvement. Cette définition est fondée sur le fait de l'impénétrabilité de la matière. Je dois remarquer en passant que quelques personnes n'accepteront pas facilement l'idée de l'impénétrabilité de la matière comme rentrant dans la Cinématique ; mais il n'y a là qu'une question de mots. Pour M. Andrade, la définition de la masse résulterait de la relation vectorielle

$$m\Delta v + m'\Delta v' = 0,$$

vérifiée, après le choc, par les accroissements géométriques des vitesses ; il serait « conforme aux faits que quelles que soient les conditions du choc renouvelé, il existe deux nombres positifs et constants » qui vérifient cette relation. Soit ; mais, assurément, cette relation ne servira pas en général pour mesurer effectivement les masses ; quand on voudra les mesurer, on continuera de faire appel au principe de l'égalité de l'action et de la réaction. M. Andrade dit un peu plus loin : « Si l'on rapproche la définition cinématique des masses de la définition classique, on voit qu'on les conciliera en admettant que le choc des deux corps développe des actions mutuelles qui, agissant pendant chaque élément infiniment petit de la durée courte mais finie du choc, sont deux à deux égales et contraires. C'est le *postulat de l'égalité de l'action et de la réaction* sous sa forme la plus simple : la pression mutuelle de deux corps en contact ». Mais si ce postulat, sous sa forme la plus simple, intervient dans la définition des masses, s'il intervient encore dans

leur détermination effective, si en outre le *choc* et l'*impénétrabilité* comportent quelques difficultés, ne vaut-il pas mieux laisser le principe de l'égalité de l'action et de la réaction à la base de la Mécanique ?

Jusqu'ici, sauf peut-être pour l'*impénétrabilité*, nous sommes restés dans la Cinématique. M. Andrade a tenu, en effet, à montrer que l'idée fondamentale de Reech peut être *débarrassée de la conception des liaisons*. C'est toutefois cette conception qui pour lui, doit fonder la notion de force et donner à la notion d'*effort* un caractère scientifique. Il accepte, avec franchise, le reproche d'anthropomorphisme que quelques-uns lui adresseront peut-être. Il a raison sur ce point : quelle est celle de nos connaissances où il n'y a pas quelque anthropomorphisme ? Ce ne serait peut-être pas une connaissance humaine. L'anthropomorphisme m'inquiéterait bien peu, c'est le défaut de clarté qui me semble plus inquiétant. La notion de mon effort musculaire me paraît bien obscure, et je n'y trouve même pas cet élément indispensable de l'idée de force, la direction. La sensation que je ressens dans le bras ne m'apparaît pas comme un vecteur. « La force, dit l'ingénieur à qui M. Andrade prête la parole, c'est ce qui fatigue des liens déterminés, ce qui les tend, ce qui peut les rompre, c'est aussi la fatigue de mon bras... » Ici encore je ne vois pas le vecteur. « Le point de vue dominant (de l'École du fil), dit-il plus loin, est la considération de certains systèmes de masse négligeable, ayant aussi une ou deux dimensions négligeables, envisagés dans un état particulier, *état de tension*, et capables de transmettre des *efforts con-*

sidérables à d'autres corps éloignés. Le type idéal d'une *machine* de ce genre est un *fil*, fil parfaitement flexible et bien légèrement extensible. C'est là l'image, le *modèle* de l'idée de force, dans la seconde école. » Sans doute, le vecteur est maintenant plus près, c'est le fil lui-même. Mais ce *modèle de l'idée de force*, cet *état de tension*, ces *efforts considérables* que l'on transmet, est-ce là des idées parfaitement claires ? La clarté est peut-être une affaire d'habitude, et les personnes qui ont des habitudes différentes répondront sans doute différemment. Est-il bien sûr que cette conception ne mêle pas la Mécanique, plus que *le fameux principe de l'inertie* à des *questions physiques particularisées* ? Et si elle satisfait l'ingénieur, satisfera-t-elle l'astronome, qui ne voit aucun fil entre la Terre et le Soleil ? Il faut bien l'avouer d'ailleurs : ces doutes ne s'adressent pas à M. Andrade en particulier, mais à toute conception de la Statique, considérée comme une science isolée, se suffisant à elle-même. Il y a dans une telle statique une partie géométrique, indépendante du sens physique des vecteurs, qu'il y a intérêt à séparer de la Mécanique, et qui a une clarté toute géométrique. Malheureusement, le sens physique de ces vecteurs, de ces *causes* d'un mouvement qui ne se produit pas (en Statique), échappe à bien des personnes, pour qui aussi la notion d'*effort*, dont assurément elles ne contestent pas la réalité, n'a pas la netteté qu'elles désireraient. Mais, après tout, il est peut-être sans inconvénient qu'il y ait deux Écoles, pourvu que tout le monde écrive les mêmes équations d'équilibre et de mouvement. Rien, dans ce qui

précède, n'est pour diminuer la valeur d'une exposition qui touche aux points les plus essentiels de la Mécanique et qui contient d'ailleurs des chapitres importants, que j'ai dû laisser de côté, comme celui qui se rapporte au principe de d'Alembert, que M. Andrade défend énergiquement contre Reech, et à propos duquel il fait une remarque bien intéressante sur le caractère invariable des réactions des liaisons.

Quelques bons esprits regrettent le caractère trop analytique de la Mécanique rationnelle, telle qu'elle est enseignée habituellement ; ils voudraient que l'enseignement de la Mécanique se reliât plus étroitement à celui de la Physique ; ils sacrifieraient volontiers à ce désir quelques-uns des plus beaux Chapitres de la Mécanique classique. On peut tout au moins désirer qu'il se constitue à côté de l'enseignement de cette Mécanique classique, un autre enseignement qui répond à des besoins très réels, et il faut savoir gré à ceux qui s'y efforcent, comme le fait M. Andrade.

*
* *

Le programme des examens d'entrée à l'École centrale a été, l'an dernier, profondément modifié ou plutôt renouvelé. Il ne s'agit pas, cette fois, de l'introduction ou de la suppression de quelque alinéa, sur laquelle les membres d'une commission ont discuté longuement autour d'un tapis vert et qui a été décidée, au hasard du vote, d'après une majorité qui, le lendemain, ne se serait pas retrouvée la même, et qui penche tantôt dans un sens, tantôt dans un autre, tantôt à cause du goût de certains membres pour quelque

petite théorie qui réveille en eux d'agréables souvenirs de jeunesse, tantôt à cause de l'autorité ou de l'âge de celui qui vient de parler et que l'on n'ose pas contredire. Cette fois, c'est l'esprit qui a soufflé, et le vent a emporté quelques fétus de paille, apporté quelques germes nouveaux. Souhaitons que ces germes poussent. Les gens qui ont rédigé ce programme ont eu l'idée vraiment neuve et originale de se préoccuper des besoins de l'École dont il est le seuil, de l'enseignement que l'on doit donner dans cette École, du métier que doivent faire un jour ceux qui en sortiront. Peut-être ces gens-là avaient-ils conscience de ces besoins et cette hypothèse explique-t-elle leur originalité. Sans doute, quelques paragraphes, qu'il serait d'ailleurs aisé de retoucher, en restant dans le même esprit, prêtent à la critique, mais il me semble bien que la tendance générale doit être louée sans réserve.

Il ne suffit pas de faire un bon et beau programme, non plus qu'un bon sermon : il faut prêcher l'exemple. M. Appell s'y est dévoué et a écrit un petit Livre[1] qui fixera le sens dans lequel doit être enseignée la Mécanique aux futurs ingénieurs de l'École centrale, à des gens qui n'auront à faire ni de la Métaphysique, ni de la pure Géométrie, ni de la pure Analyse, mais bien à mettre en équation des problèmes réels.

L'espace absolu est défini par un trièdre trirectangle invariablement lié aux étoiles fixes : dans

1. Appell. *Cours de Mécanique à l'usage des candidats à l'École centrale des Arts et Manufactures*, Paris, Gauthier-Villars, 1902.

la plupart des problèmes pratiques il n'y a pas d'inconvénient à regarder le trièdre comme invariablement lié à la terre. La masse m d'un point matériel est un coefficient numérique lié à ce point : on apprendra tout à l'heure comment on mesure effectivement ce nombre au moyen de la balance. Si un point matériel est placé dans un champ de forces, il prend une accélération γ et la force qui agit sur lui est, par définition, le vecteur $m\gamma$. La pesanteur conduit, par voie expérimentale, à la notion de *poids absolu*. La *pression* exercée par un poids sur la main qui le soutient donne l'idée d'une comparaison grossière entre les poids absolus des corps par la sensation de l'effort musculaire pour les empêcher de tomber. Les dynamomètres permettent de préciser cette comparaison. Sans doute, tout cela est grossier, et l'on criera, si l'on veut, au cercle vicieux, quand il sera question de mesurer la masse par la balance : la balance est une machine dont il faudrait avoir fait la théorie pour savoir ce qu'elle donne. Le vrai cercle vicieux est celui qu'on ne voit pas, celui où l'on s'enferme sans le savoir. Celui-ci crève les yeux et n'a donc aucun inconvénient. Il n'y a pas de science du réel sans cercle vicieux. Pascal a démontré cela surabondamment et je crois bien qu'Anaxagore l'avait fait longtemps avant lui : ce n'est pas là une découverte moderne. Et, cependant, il est vrai qu'il y a une science du réel, une Physique, qui nous permet de prévoir des phénomènes que nous observons, des machines qui marchent, qui exécutent des travaux, et que l'on calcule. L'important ici est de ne pas se tromper, et de ne pas substituer dans les

équations des nombres inexacts. Eh bien ! c'est effectivement avec une balance qu'on mesure les masses, c'est des nombres obtenus au moyen de cet instrument que l'on se sert, et c'est ce qu'il importe de savoir.

*
* *

M. Januschke[1] a emprunté une curieuse épigraphe à R. Mayer : c'est une déclaration de guerre à ce qui reste des dieux de la Grèce, réfugiés dans les fluides impondérables ; c'est là, il faut l'avouer, un triste déguisement pour ces radieuses divinités, plus triste encore que ceux qu'avait rêvés la fantaisie de Henri Heine ; ces lamentables idoles sont maintenant détrônées par le principe de la conservation de l'Energie. Si ce principe devient une religion, il convient peut-être, de lui pardonner le mystère dont il reste enveloppé ; tous les termes, à vrai dire, n'en sont pas d'une parfaite clarté ; si les forces dont la notion est assurément un résidu métaphysique n'y figurent pas immédiatement, il est difficile de dire ce que c'est que les masses, à moins de se résoudre à les regarder *comme des coefficients qu'il est commode d'introduire dans les calculs*[2], ce que c'est que l'énergie potentielle, à moins de la regarder comme une fonction des coordonnées, ce qui est peut-être insuffisant. Mais M. Januschke ne se perd pas dans ces questions théologiques. C'est la pratique du culte qu'il veut ensei-

1. JANUSCHKE (H,). *Das princip der Erhaltung der Energie und seine Anwendung in der Naturlehre.*

2. POINCARÉ, Les idées de Hertz sur la Mécanique (*Revue générale des Sciences*, 30 septembre 1897).

gner ; le principe de la conservation de l'énergie est posé comme une induction résultant des découvertes de Galilée ; quelques exemples concrets, simples et bien choisis permettent d'en donner quelque habitude au lecteur. Disons de suite que l'auteur a grand soin dans toutes les parties de son Livre, de donner d'intéressants détails historiques sur les découvertes scientifiques et l'évolution des idées qui s'y rattachent ; c'est là une excellente méthode qui marque d'ailleurs les tendances philosophiques de M. Januschke, assez nettement inclinées vers le positivisme. S'il est vrai que l'auteur incline dans ce sens, pourquoi énonce-t-il cette proposition : l'énergie totale de l'Univers est constante ? Elle semble bien supposer, pour avoir un sens, que l'Univers soit fini, et cette hypothèse-là dépasse la Science positive. Celle-ci est essentiellement limitée dans le temps et dans l'espace, à des choses voisines de nous, à moins que nous ne prétendions substituer un Univers de définition à celui dont l'induction nous permet de pénétrer une faible partie.

*
* *

Après avoir lu cette petite brochure[1], on s'imagine volontiers que l'auteur est un homme qui pense dans la solitude, mais non sans vigueur : tont ce qu'il dit, sans doute, n'est pas nouveau ; mais quelques idées fondamentales ressortent avec une netteté à laquelle on n'est pas habitué. Son travail a un caractère à la fois philosophique et pédagogique : pour ma part, je suis disposé à

1. Calinon. *Étude critique sur la mécanique.*

en adopter les conclusions. Je demande pardon au lecteur de parler ainsi ; mais il s'agit ici de matières où il est plus modeste de dire : Je suis de cet avis, que de dire : Cela est vrai.

M. Calinon insiste sur la convenance qu'il y a à séparer de l'enseignement de la Mécanique proprement dite l'enseignement de la Géométrie des segments de droite et de la Cinématique ; là-dessus, non plus que sur le rôle que joue la notion de temps en Cinématique, il ne trouvera guère de contradicteur. On peut regarder la notion qu'il indique comme fondée depuis les travaux de Möbius et il est désirable qu'elle passe tout à fait dans les habitudes de l'enseignement. Quant au changement de notations que propose M. Calinon, je le crois à peu près inutile.

Il me paraît, comme à M. Calinon, impossible de définir deux temps égaux ; le temps est ce que marque une pendule déterminée.

Sans doute, ni le théorème relatif à la composition des accélérations, ni les formules relatives aux changements de la variable indépendante dans les dérivées première et seconde ne sont des nouveautés ; mais il importe à coup sûr de mettre en évidence le rôle que jouent ces notions purement mathématiques dans l'interprétation des principes de la Mécanique : si, par exemple, le principe de l'action et de la réaction est vrai quand on rapporte les corps à un système d'axes particulier et qu'on mesure le temps sur une pendule particulière, ce principe ne peut être vrai si l'on rapporte les corps à un système d'axes mobile par rapport au premier système, ou qu'on mesure le temps sur une pendule qui n'a pas la même marche que la pendule primitive. Le carac-

tère expérimental et par suite contingent des principes que l'on vient de citer ressort ainsi avec une entière clarté. Cette critique du choix des axes et de la variable que l'on désigne sous le nom de temps, et des conséquences qu'on en peut tirer pour l'exposition de la Dynamique, me paraît la partie la plus importante et la plus neuve du travail de M. Calinon.

* * *

Le livre de M. Weiss[1] s'ouvre par une longue préface, qui tient presque le quart du fascicule que nous signalons. L'auteur aurait bien pu l'appeler *Discours préliminaire*, d'autant que le ton en est quelquefois oratoire et que, rien qu'à la lire, on s'imagine volontiers un auditoire, s'intéressant aux idées générales, aux développements historiques, aux querelles sur le sens des mots et soulignant à l'occasion les intentions plus ou moins conscientes de M. Weiss, qui a l'habitude de ne pas parler de l'Allemagne sans ajouter « y compris l'Autriche ». Quoi qu'il en soit, cette préface ou ce discours contient toute une histoire de la Mécanique, et M. Weiss remonte à Galilée, même à Archimède pour retracer rapidement la façon dont la Science, tout d'abord expérimentale, a évolué, s'est constituée et s'est divisée en diverses branches. Il insistera naturellement sur les rapports entre la Mécanique et la Géométrie : signalons en passant cette ingénieuse remarque de M. Reulaux, que les anciens considéraient d'habitude les faits géométriques à l'état de repos : la Géométrie des

1. Weiss (H.). *Grundsätze der Kinematik.*

anciens est une *ruhende Geometrie*. Une conique est pour eux l'intersection d'un cône par un plan ; elle est plutôt pour les modernes la trajectoire d'un point mobile, ou la courbe enveloppée par ses tangentes. Si juste que soit cette remarque, il ne faudrait peut-être pas en exagérer la portée : car, enfin, les anciens, eux aussi, se servaient d'instruments pour *décrire* les courbes, et du moment qu'on décrit une courbe avec un instrument, fût-ce un cercle avec un compas, elle ne peut manquer d'être une trajectoire. Le point de vue moderne n'était assurément pas étranger aux anciens. Il est d'ailleurs bien évident que le développement de la Géométrie dans les temps modernes a été lié très intimement à l'étude du mouvement, et cela est d'autant plus naturel que la notion de *déplacement* tout au moins entre essentiellement dans notre conception de l'espace. Mais il importe peut-être de remarquer qu'en Géométrie et même en Cinématique la notion de *temps* ne joue qu'un rôle apparent; le *temps* est une variable particulière, à laquelle nous pouvons substituer une variable quelconque. Que la notion de *temps* nous ait servi à constituer la notion générale de *variable*, qu'elle en fournisse un des exemples les plus simples, celui peut-être auquel on se réfère le plus fréquemment, quand on pense à *une* variable, cela est bien certain. Qu'il nous eût été impossible, sans la notion de temps, de constituer la notion de variable, c'est ce qu'il appartient aux philosophes de décider, ou de discuter, et la réponse de ceux qui estiment que cette notion entre nécessairement même dans l'élaboration de l'idée de nombre entier n'est pas

douteuse. Il n'en est pas moins vrai que la notion de variable peut être abstraite de l'idée de temps; autrement nous ne saurions acquérir l'idée de deux variables indépendantes : or c'est le rôle que joue cette notion de variable qui caractérise effectivement la Géométrie moderne, dans laquelle la courbe est regardée comme le *lieu* (plutôt que la trajectoire) d'un point qui dépend d'une variable ou l'enveloppe d'une droite qui dépend d'une variable, la surface comme le lieu d'un point qui dépend de deux variables, etc., etc.

Or cette notion de variable suffit non seulement à la Géométrie, mais encore à la Cinématique pure qui, à la vérité, est une branche de la Géométrie, plutôt que de la Mécanique. Sans doute, on a distingué dans la Cinématique la *Géométrie cinématique* où l'on ne considère que des propriétés géométriques et où l'on convient que l'on fait abstraction du temps. Personne n'hésitera à faire rentrer cette *Géométrie cinématique* dans la Géométrie pure. Cette distinction de la *Géométrie cinématique* du reste de la Cinématique, que conserve d'ailleurs M. Weiss, es parfaitement légitime avec certains modes d'exposition; elle va avec un certain ordre des matières que l'on peut adopter ou rejeter; mais elle n'a rien de fondamental. La vitesse et l'accélération, par exemple, telles qu'on les considère en Cinématique, ne sont autres que des dérivées géométriques prises par rapport à une variable. Que cette variable s'appelle le *temps*, et qu'on la désigne par la lettre t, cela, à vrai dire, n'a aucune importance et il est parfaitement naturel de rattacher à la notion de vitesse les propriétés

des tangentes ou les propriétés infinitésimales du premier ordre, à la notion d'accélération les propriétés des rayons de courbure ou les propriétés infinitésimales du second ordre. On n'a, pour cela, introduit dans les démonstrations aucun élément étranger à la Géométrie. Ces dérivées géométriques s'introduisent d'une façon naturelle dans l'étude des courbes et il y aurait assurément quelque naïveté à croire que l'on fait de la Mécanique parce qu'on les a appelées *vitesse* ou *accélération*. On a simplement développé des propriétés géométriques qui seront indispensables à la Mécanique; mais, aussi bien, fait-on de la Mécanique quand on enseigne la théorie des fonctions circulaires, ou des fonctions elliptiques, parce que ces théories ont des applications en Mécanique? Le caractère purement géométrique des théories sur la composition des mouvements n'est pas moins évident. On pourrait, avec plus de raison peut-être, soutenir que la Cinématique appliquée est une science distincte, parce que la notion de l'impénétrabilité de la matière est étrangère à la Géométrie; et, à la vérité, si l'on ne substituait pas aux mécanismes réels qui se déforment, qui frottent, qui s'usent, des mécanismes purement théoriques, on sortirait sans doute de la Géométrie; mais du moment que les figures que l'on considère sont susceptibles de définitions purement géométriques, et si l'on admet que les notions de *distance*, de *corps solide* font partie intégrante de notre concept d'espace, il est trop clair qu'il faut faire rentrer dans la pure Géométrie la théorie du quadrilatère articulé, du guidage rectiligne, des engrenages, etc., à condition, bien

entendu, qu'on regarde comme parfaitement solides les éléments de ces mécanismes. La Cinématique appliquée, en tant qu'elle traite du mouvement de pareils organes, sera donc, elle aussi, un chapitre de Géométrie, un chapitre particulier, parce qu'il s'occupe de problèmes particuliers, et dont l'intérêt, pour celui qui veut étudier la Mécanique pratique, les mécanismes réels, n'est pas contestable. Malgré son intérêt pratique, et quoiqu'elle soit née et qu'elle ait commencé de se développer à propos de problèmes réels, il est certain que cette branche de la Science est en train de revêtir son individualité propre ; ceux qui en poursuivent l'étude en arrivent à se poser des problèmes qui les intéressent par eux-mêmes, non par leurs applications; on ne prévoit guère, par exemple, le jour où les mécaniciens utiliseront les théorèmes de M. Kempe et de M. Kœnigs sur la description des courbes algébriques au moyen de systèmes articulés. En résumé, il me paraît que la Cinématique appartient non à la Mécanique, mais à la Géométrie : il s'agit, bien entendu, de la Cinématique au sens d'Ampère, qui est le plus généralement adopté.



CHAPITRE VI

LA PSYCHOPHYSIQUE

A propos du logarithme des sensations

A Monsieur Emile Alglave, directeur de la REVUE SCIENTIFIQUE.

MONSIEUR,

La Revue a publié dernièrement plusieurs articles extrêmement intéressants de M. le professeur Ribot sur les progrès ou plutôt sur les commencements d'une science qui tiendrait le milieu entre la psychologie et la physiologie. L'un de ces articles est relatif à la loi dite de Fechner, en vertu de laquelle la sensation serait proportionnelle au logarithme de l'excitation. J'ai quelque peine, je l'avoue, à comprendre cette loi. Me permettrez-vous de la critiquer un peu, en regardant les choses d'une façon qui m'est peut-être plus familière que les spéculations de pure philosophie ?

Comme on ne peut prendre le logarithme que d'un nombre et que le logarithme d'un nombre est un nombre, il faut, pour que la loi de Fechner ait un sens, que la sensation et l'excitation y soient remplacées par des nombres. Il serait utile de dire comment on parvient à ces nombres, de quelle mesure ils sont l'expression, au moyen

de quelle unité on les obtient. C'est de cette manière que l'on procède en physique; c'est avec un soin minutieux que l'on définit les unités, que l'on décrit les procédés de mesures, que l'on fixe le sens des nombres.

Rien de pareil ici. On se borne à établir entre deux termes dont aucun n'a de sens précis une relation où figure une fonction transcendante.

L'excitation est quelque chose d'extérieur à nous et, à ce titre, on peut d'une certaine façon la mesurer; mais il est essentiel, dans chaque cas particulier, de dire comment on la mesure; c'est, d'ailleurs, ce qu'il a fallu faire pour chacune des expériences que l'on a citées afin d'établir la loi. S'il s'agit, par exemple, de l'excitation causée par la chaleur, définira-t-on cette excitation par la température, ou par la quantité de chaleur, ou autrement?

La température n'est pas autre chose que le degré marqué par le thermomètre que l'on a à sa disposition. De quel thermomètre se servira-t-on? Je ne parle point des petites différences que peuvent présenter deux instruments analogues. Mais à quelle graduation s'arrêtera-t-on, comment définira-t-on le zéro? Dans ses expériences, Fechner a pris pour zéro la température de la peau, il aurait pu prendre la température du sang. La quantité de chaleur est une fonction complexe de la température, et la loi trouvée devrait être toute autre si l'on considérait, comme mesure de l'excitation, la quantité de chaleur, toute autre encore, si l'on s'arrêtait à une fonction arbitrairement définie de la température. En vérité, quel rapport si simple, si naturel y a-t-il entre cette cause incon-

nue que nous appelons la chaleur et l'allongement d'une colonne mercurielle, que nous soyons obligés de prendre l'un comme la mesure de l'autre? Ce n'est qu'une raison fortuite, notre propre commodité qui nous pousse à le faire.

On pourrait répéter les mêmes observations à propos du poids, de la lumière, du son. Mais ce qui précède doit suffire pour montrer que le second terme de la loi de Fechner ne peut avoir de sens que si, dans chaque cas particulier, on le définit d'une façon précise, que l'*excitation* est un mot vague, sans valeur scientifique si l'on ne définit pas à chaque fois la fonction absolument arbitraire qui doit servir à la mesurer. Que dire, Monsieur, de la sensation? La sensation est un phénomène qui se passe en nous, que nous saisissons en nous, par sa face intérieure, en quelque sorte, et qui est rebelle à toute espèce de mesure. Sans doute, une sensation peut être plus ou moins vive, mais cela suffit-il pour que la sensation soit une quantité? Une qualité, la beauté, par exemple, peut aussi être plus ou moins grande. Les seules *grandeurs* que l'on puisse mesurer directement sont celles dont on peut définir l'égalité et l'addition, et de pareilles grandeurs ne semblent se rencontrer que dans le domaine de l'abstraction, des mathématiques pures. Dans la réalité, nous ne mesurons pas les choses elles-mêmes, nous ne les observons pas, nous ne savons rien sur elles, nous ne mesurons que des longueurs dont les variations ont, avec les variations des choses, une connexité complexe et inconnue. Quelle longueur, puisque toute mesure, comme le dit M. Ribot, se ramène à la mesure d'une longueur, servira-t-elle à la mesure de la sensation? Quel phéno-

mène permettra-t-il d'établir la transition entre ces deux termes si éloignés : une longueur, une sensation ? Sans doute, il n'est peut-être pas absolument impossible d'en trouver, si l'on veut regarder la sensation par son côté extérieur, physiologique. Si chaque sensation correspondait à un mouvement de quelqu'un de nos membres, l'amplitude de ce mouvement, ou telle fonction que l'on voudra de cette amplitude pourrait être prise comme mesure de la sensation. Si la physiologie, réalisant des progrès qu'il est permis aux philosophes de rêver, parvenait à découvrir une fonction, qu'il fût possible d'évaluer, des mouvements très petits qui se produisent dans les nerfs sous le coup d'une excitation extérieure, cette fonction ou une fonction de cette fonction pourrait encore servir à mesurer la sensation. On voit ainsi tout ce qu'il y a d'arbitraire en théorie dans le sens qu'il faudrait attacher au premier terme de la loi de Fechner ; mais, pratiquement, dans l'état actuel de la science, je crois que ce sens ne doit être cherché nulle part.

J'arrive, Monsieur, à la démonstration de la loi, et je la rappelle dans ce qu'elle a d'essentiel.

Un certain nombre d'expériences montrent qu'en définissant convenablement l'excitation on n'apprécie de différence entre deux sensations consécutives que si l'excitation varie au moins d'une quantité dont le rapport avec l'excitation primitive est déterminé. S'il s'agit, par exemple, de la sensation que produit la pression d'un poids sur la peau, « une augmentation ou une diminution de pression ne sera sentie que si le poids ajouté ou retranché est dans le rapport de 1/3 au poids primitif ». Il y a là un fait dont je ne mé-

connais pas l'importance. Si l'on avait formulé la loi dans ces termes, il y aurait eu peu à dire. Il est vrai qu'on n'aurait pas causé tant d'étonnement aux gens qui croient savoir ce qu'est un logarithme et que l'on aurait pu être compris de ceux qui ne le savent pas.

Toutefois, Monsieur, même en réduisant la loi de Fechner à cet énoncé plus modeste, quelque chose m'inquiète encore. Je crois avoir expliqué combien était arbitraire la façon dont on mesurait les phénomènes. Comment se fait-il que, dans tous les cas, on trouve un rapport constant entre la différence de l'excitation et l'excitation primitive? Il y a là un bonheur surprenant. Si l'on modifiait le procédé de mesure, si, en d'autres termes, on changeait la variable, il faudrait pourtant changer la loi. Eh bien! Monsieur, je ne serais pas étonné que les expériences conduisissent aux mêmes conclusions, et je crains un peu que la proportionnnalité observée ne soit tout à fait grossière et du même ordre que celle qui existe toujours entre les petits accroissements de deux fonctions continues d'une même variable qui varient dans le même sens. Tout reviendrait alors à dire que la quantité dont il faut augmenter ou le poids ou la température pour que le sujet s'en aperçoive, dépend de ce poids ou de cette température, et je suis vraiment persuadé qu'il en est ainsi.

Mais, Monsieur, n'allons pas si loin, admettons toutes les expériences et croyons à leur exactitude. Ce qui dépasse les bornes de mon entendement, c'est la mise en équation et la façon dont on obtient la loi des logarithmes.

Représentons par r l'excitation, par dr l'ac-

croissement infiniment petit de l'excitation, par *dc* l'accroissement correspondant de la sensation ; les résultats précédents autorisent, dit-on, à poser l'équation différentielle.

$$dc = k \frac{dr}{r},$$

k étant une constante numérique : d'où l'on déduit en intégrant

$$c = k \log \frac{r}{q},$$

q étant la constante introduite par l'intégration, constante qui représenterait, au point de vue physiologique, la limite inférieure de l'excitation, car si *r* était plus petit que *q*, le second membre de l'égalité deviendrait négatif. Sous les restrictions que j'ai faites plus haut, je comprends à peu près le second membre de l'équation différentielle, mais le premier, Monsieur ! qu'est-ce donc que la différentielle *dc* de la sensation ? Quand on ne sait pas du tout ce que signifie la différence de deux sensations, comment peut-on bien parler de la différentielle d'une sensation ? A force de rendre les choses petites, finirait-on par les rendre claires ? Quel rapport y a-t-il entre une différentielle et ce fait que, en variant l'excitation, on saisit un moment où la sensation change. Il n'y a là ni quantité, ni continuité. Cette façon d'apprécier les différentielles me paraît extraordinaire. Enfin que signifie l'intégration, la sommation des différentielles de sensation, quand on ne sait pas ce qu'est la somme de deux sensations, non plus que leur différence ? Au fond, il n'y aurait, je crois, qu'un moyen d'entendre la loi de Fechner ; ayant défini l'exci-

tation r d'une façon précise, on définira la sensation c par la formule

$$c = k \log \frac{r}{q}.$$

Toutes les définitions sont permises ; mais, vraiment, dans des matières aussi obscures et aussi peu étudiées, l'introduction des mathématiques transcendantes me semble un peu hâtive. Défions-nous, Monsieur, des expressions pompeuses et du mélange des sensations, des logarithmes et des excitations : je vous avoue que j'ai ce logarithme sur le cœur.

Un géomètre éminent, mort il y a quelques années, a eu le bonheur, dans son existence, de trouver cette phrase : l'espace indéfini est enveloppé par un plan. D'autres géomètres, qui vivent encore et qui se plaisent aux singularités de style, mêlent, dans des formules étonnantes, les infinis et les imaginaires. Ceux qui entendent un peu les mathématiques savent qu'il n'y a au fond de tout cela que des propriétés algébriques très simples et très précises ; mais les commençants sont émerveillés. J'en suis là, Monsieur, pour la psychologie mathématique.

* * *

A Monsieur Emile Alglave.

MONSIEUR,

Je vous dois vraiment bien de la reconnaissance pour l'hospitalité que vous avez donnée à ma lettre.

Vous m'avez laissé exposer mes scrupules et voici qu'un des hommes qui font le plus autorité dans la psychophysique veut bien me venir en aide; je l'en remercie très sincèrement; mais l'éminent professeur à l'Université de Liège s'est bien mépris sur mon compte ; il a pris pour des critiques narquoises ce qui n'était que des questions niaises. J'avais, il est vrai, ressenti quelque étonnement à l'égard de ces nouveautés ; mais Aristote, Monsieur, ne dit-il pas que l'étonnement est le commencement de la science ? J'espère bien que c'est mon cas, que mon étonnement se convertira en admiration et que la foi me viendra. M. Wundt a bien mieux vu à qui il avait affaire; il le prend comme il faut avec « le correspondant de la Revue » et le traite comme il convient. On reconnaît le professeur sérieux, qui ne badine pas.

D'ailleurs, mon ignorance à demi avouée et dont on s'est bien aperçu aurait dû être le garant de mon innocence; j'ai eu le malheur de dire que « ces matières étaient peu étudiées ». — Par qui? demande-t-on. — Ah! monsieur, je n'y entendais pas malice et la réponse est trop aisée. Dieu me garde de jamais penser que ceux qui contribuent à fonder une science nouvelle n'étudient point les faits dont ils s'occupent, ne réfléchissent pas sur les théories qu'ils inventent et les lois qu'ils formulent ! La réprimande est juste et je tâcherai d'en faire mon profit. Mais il ne faut pas trop m'en vouloir. Que deviendrait le monde si chacun ne parlait que de ce qu'il connaît à fond? On oublierait bien vite sa langue maternelle. Les uns parlent pour exposer ce qu'ils savent, d'autres pour s'instruire, d'autres encore pour ne rien

dire. J'aurais été heureux d'être rangé parmi les seconds.

J'ai fait des objections qui s'étaient présentées à l'esprit de M. Delbœuf, d'Helmholtz : elles n'étaient donc point si mauvaises. Lorsqu'on s'aperçoit que la voie que l'on suit a été frayée par des hommes illustres, il faut se réjouir d'avoir choisi un bon chemin et s'enorgueillir de fouler une noble poussière. Il y a d'autres difficultés encore, je n'en veux pas douter ; mais à coup sûr M. Delbœuf, en le disant, donne l'exemple, bon à suivre, de cette sincérité, de cette défiance modeste qui conviennent aux vrais savants.

J'ai encore à m'excuser, Monsieur, d'une faute que je n'avais point voulu commettre. Je ne pensais pas avoir fait preuve d'une grande fatuité en disant que je croyais savoir ce que c'est qu'un logarithme; ce serait, avouez-le, de la fatuité à bon marché; mais jamais je n'ai eu l'idée malséante d'insinuer que Weber, Helmholtz et d'autres pourraient avoir quelque chose à apprendre là-dessus. Je respecte trop les grands hommes pour me permettre une pareille inconvenance; mais il ne faut pas non plus abuser d'eux. Cela rappelle un peu l'argument de ceux qui prétendent établir la divinité du christianisme en énumérant les noms de tous les gens de génie, comme Charlemagne, Képler, Newton et Napoléon qui y ont cru. Il est vrai, monsieur, que le christianisme a encore plus de mystères que le logarithme.

Avouez maintenant, Monsieur, que j'ai du malheur, sur le point qui me semblait capital, que j'avais le plus cherché à éclaircir, sur la question de savoir quel est le caractère des

grandeurs mesurables et si la sensation possède ce caractère ; M. Delbœuf déclare qu'il ne me comprend pas, ce qui m'étonne et me prouve que je me suis bien mal exprimé, et M. Wundt estime que ce que j'ai dit n'a point de sens, ce qui ne me fâche point, car l'éminent professeur a bien voulu collaborer avec moi dans l'expression des idées qu'il qualifie ainsi et me prêter des façons de parler que je n'ai jamais employées.

Je n'ai point, Monsieur, l'intention de changer la langue française et d'enlever le nom de *grandeur* à tout ce qui est susceptible d'augmentation ou de diminution, en laissant à ces mots le sens plus ou moins vague qu'on leur donne d'habitude ; mais l'usage qui, parmi les *grandeurs*, distingue les *quantités*, c'est-à-dire les grandeurs qui peuvent être mesurées et nombrées, me paraît bon à suivre, quelque opinion que l'on ait sur celles des grandeurs que l'on n'a point encore pu et que l'on ne pourra jamais mesurer et nombrer. M. Delbœuf pense que tant qu'un phénomène n'est pas réduit en nombre, il laisse dans l'esprit quelque chose de mystérieux : voilà une proposition qui est faite pour réjouir tous les mathématiciens et je me garderai bien d'y rien contredire ; mais combien reste-t-il de phénomènes mystérieux et obscurs ?

L'attention soutenue que plusieurs savants ont portée sur quelques-uns de ces phénomènes leur a peut-être déjà permis d'en voir nettement, d'en arrêter les contours, qui paraissent encore à d'autres confus et fuyants. Cette vive lumière qui resplendit dans la science des nombres, pénétrera-t-elle jamais partout. J'ai le regret de dire, Monsieur, qu'il me reste des doutes là-dessus.

Il me semble encore que les seules grandeurs auxquelles l'idée de mesure soit directement applicable, sont celles dont on conçoit clairement l'*égalité* et l'*addition* : en fait, partout où l'on traite de la mesure des quantités, qu'il s'agisse de *longueurs*, d'*angles*, de *surfaces*, de *temps*, de *forces*, on commence par appeler l'attention sur ce qu'on doit entendre par l'égalité et la sommes de deux de ces quantités ; il n'est guère de traité didactique qui ne débute ainsi. Le caractère essentiel des grandeurs directement mesurables est l'homogénéité : ce qui vient s'ajouter à elles, lorsqu'elles augmentent, est absolument de la même nature que ce qui existait déjà : une longueur, une surface, le temps, sont de telles grandeurs ; lorsqu'on y ajoute une longueur, les deux choses ajoutées sont absolument de la même nature que leur somme. Ce caractère d'homogénéité appartient nécessairement aux grandeurs directement mesurables, précisément parce qu'on ne peut comparer entre elles, pour les mesurer, que des grandeurs de même espèce, et il me paraît exiger, comme je l'avais dit, un haut degré d'abstraction dans l'idée que nous avons de la grandeur mesurable, quelle qu'elle soit, puisque cette idée est obtenue en séparant un élément particulier, toujours le même, de tous ceux qui en troubleraient l'homogénéité. M. Delbœuf a parlé du sentiment esthétique ; permettez-moi, Monsieur, de le prendre pour exemple ; ma pensée en s'exagérant, deviendra peut-être plus claire.

Il y a, sans doute, des degrés dans nos sentiments d'admiration. Certaines œuvres nous font plus d'impression que d'autres. Mais dans ces

diverses impressions, n'y a-t-il que des différences du plus au moins ? N'y a-t-il pas des différences de nature ?

Vous voilà devant la Vénus de Milo : un monde de sentiments fugitifs, persistants, vagues, précis, n'ayant entre eux rien de comparable, s'éveille en vous : votre intellect se met en branle, un autre monde d'idées et de souvenirs prend possession de votre cerveau et y déroule ses richesses : tout cela se fond, s'unit, s'élabore à perfection et vous met dans cet état d'émotion délicieuse qui grandit jusqu'à vous absorber en entier, ou diminue et s'éteint pour renaître bientôt. Au milieu de cette complication, dans ce mélange de choses hétérogènes, où la vie met quelque unité, et dont votre admiration est faite, comment abstraire un élément mesurable, dont les diverses parties soient de même espèce, soient comparables entre elles ?

Mais, poursuivons, Monsieur. Supposons qu'on retrouve les deux bras de la Vénus et qu'on les dépose devant vous. Ils ne seraient pas sans émouvoir aussi votre admiration. Mais cette admiration serait-elle de la même nature que celle que vous éprouviez devant la statue ; ne serait-elle pas faite d'autres idées, d'autres sentiments ? Tout autres encore seraient les sentiments et les idées qui viendraient vous traverser devant la statue restaurée, ayant recouvré ses deux bras plus belle assurément. Ce qui viendrait alors s'ajouter à la beauté qu'elle a déjà serait-il de la même nature que cette beauté ? Y aurait-il là matière à quelque comparaison, à quelque sommation ? Le composé final serait-il comparable à ses éléments devenus eux-mêmes différents

de ce qu'ils étaient, par le fait de leur union ?

Et la musique, Monsieur ! C'est bien pis. Qu'il y a loin de la musique, « à l'art de combiner des sons d'une manière agréable », et aux règles mathématiques que l'acoutisque enseigne pour cela ! La grammaire, la linguistique ne sont pas certes plus éloignées de cet art consommé que possédait un Pascal, un Bossuet, pour rendre avec des mots la sublimité de leurs pensées. Mais ne craignez rien, Monsieur, je m'arrête ; j'aurais vraiment trop de plaisir à m'enfuir par ce chemin là, à m'égarer dans cette forêt touffue, à énumérer longuement les complications singulières. Au surplus, vous trouverez peut-être qu'il est temps de laisser cette digression qui, je l'espère, ne sera pas inutile, et d'en revenir à la sensation.

Eh bien ! il ne me semble pas qu'une sensation possède ce caractère d'homogénéité qui appartient essentiellement aux grandeurs mesurables. J'ai beau faire, Monsieur, en restant à un point de vue purement subjectif, je ne conçois ni la somme de deux sensations, ni leur différence : lorsqu'une sensation grandit, elle devient tout autre, et ce qui est venu la modifier, dont je n'ai nulle idée, ne me paraît pas de la même nature que la sensation primitive.

Que l'on tienne à la main un objet qui s'échauffe progressivement : la sensation se modifiera incessamment et se terminera en douleur cuisante ; on aperçoit bien que les termes extrêmes ne se ressemblent guère ; lorsque la douleur s'en mêle, d'autres nerfs, si je ne me trompe, sont mis en jeu. Cette différence de nature qui existe incontestablement entre deux sensations de chaleur causées par des excitations qui diffèrent suffisam-

ment, me paraît subsister, à un moindre degré, entre deux sensations intermédiaires.

Quant à cette sensation différentielle qui vient servir d'unité, il me semble qu'une unité doit toujours rester la même et que cette unité là n'est point assez constante. Entre trois mètres et deux mètres ou entre mille mètres et neuf cent quatre-vingt-dix-neuf mètres les différences sont les mêmes, cela s'entend assez. — L'objet que je touche est à une température de 20 degrés, j'éprouve une certaine sensation ; l'òbjet s'échauffe, ma sensation change : si je m'en crois, Monsieur, elle est devenue tout autre, elle a changé de nature, elle n'est pas comparable à la précédente, et je ne la conçois nullement comme la somme de la première sensation et d'une certaine sensation différentielle ; mais, voyez comme je suis accommodant, je dirai qu'elle est cette somme.

Ce sera, si vous le voulez, une définition.

Voici, maintenant, que cet objet est à une température de 40 degrés ; il s'échauffe encore, jusqu'à ce que je m'en aperçoive. Cette seconde sensation qui viendrait s'ajouter à ma sensation de 40 degrés, je ne vois pas du tout qu'elle soit égale à la première, qui serait venue modifier mon ancienne sensation de 20 degrés. Ce sont, dit M. Georges Guéroult, deux minimums d'une même fonction ; il parle, il est vrai, de sensations beaucoup plus simples, relatives à la notion de l'espace ; mais qu'il y ait une fonction et qu'elle soit toujours la même, cela est précisément en question.

Toutefois, ne sachant rien sur la grandeur de ces sensations différentielles, nous pouvons convenir de dire qu'elles sont égales.

Ce sera encore une définition.

Nous voilà donc, Monsieur, en possession de ce qui m'inquiétait tant : deux sensations égales. Il est vrai qu'elles sont bien petites, et il s'agit d'en réunir plusieurs ensemble afin d'en faire une sensation quelconque.

On dira, par exemple, qu'une sensation de 50 degrés est exprimée par le nombre de sensations différentielles qui se succéderaient depuis l'absence de sensation jusqu'à la sensation de 50 degrés si l'excitation variait depuis la température de la peau jusqu'à 50 degrés, en supposant toutefois que la fatigue ne vienne pas compliquer le phénomène. Cette nouvelle définition, Monsieur, il me paraît bien impossible de la tirer de la sensation elle-même ; jamais elle ne serait venue à l'esprit d'un homme qui aurait porté son attention sur la sensation seule, non sur l'excitation.

C'est l'étude objective de l'excitation et de ses variations qui conduit à cette définition du nombre qui mesurait la sensation. C'est au fond par l'excitation que la sensation se trouve définie. En accordant que la sensation différentielle correspond à un accroissement de l'excitation proportionnel à l'excitation primitive, cette définition se ramène, au moyen d'un petit calcul qu'il est inutile de répéter, à celle-ci : la sensation est le logarithme de l'excitation ; mais, encore une fois, je ne vois pas qu'il y ait là autre chose qu'une définition « aussi légitime, d'ailleurs, qu'arbitraire ».

Ce n'est point énoncer une loi que de dire que le cercle a tous ses points à égale distance du centre.

Maintenant, qu'une telle définition puisse rendre des services, je ne le nierai point, c'est aux

psycho-physiciens à le prouver, et j'espère bien qu'ils le feront.

Par exemple, les intéressantes recherches dont M. Delbœuf a bien voulu vous entretenir pourront aboutir à montrer comment les coefficients que l'on peut faire entrer dans la formule précédente doivent être modifiés sous l'influence de la fatigue.

Puisse cette définition être aussi utile pour ce genre d'études que le thermomètre, qui sert à définir la température, l'a été dans les travaux de physique !

Je m'arrête sur cette espérance, Monsieur. Aussi bien je crois que j'ai eu grand tort d'exposer tous ces doutes, de faire toutes ces critiques ; je souhaite qu'on n'en tienne pas compte et je n'en veux plus faire d'autres. La *psycho-physique*, si elle devient une science complète, ne sera pas la première à avoir eu des commencements difficiles et des principes obscurs. On aurait tort, pour si peu, d'en rester là. La lumière se fera plus tard. C'est une déplorable manie que de chercher à voir toujours trop clair. Les yeux se brouillent, on ne voit plus rien. Il vaut mieux se trouver satisfait lorsqu'on comprend à moitié : c'est le vrai moyen d'aller en avant et d'être content de soi.

Croyez, Monsieur, à tout mon respect et à tout mon dévoûment.

* * *

La Psychophysique[1], conçue comme une *science exacte de l'âme et du corps*, a donné de grandes espérances à son fondateur, et peut-être

1. Foucault (M.). *La Psychophysique*. Thèse pour le doctorat présentée devant la Faculté des Lettres de l'Université de Paris. Un vol. in-8, Paris, Félix Alcan, 1901.

à quelques autres personnes. En reste-t-il quelque chose aujourd'hui? C'est ce qu'il n'est pas très facile de décider, après la lecture du consciençieux travail que M. Foucault vient de consacrer à l'histoire de cette curieuse tentative. Il n'en reste peut-être rien, au point de vue philosophique, et il semble que ce soit là l'opinion des philosophes; mais M. Foucault ne s'est pas borné à raconter les faits, à résumer les mémoires et les conclusions, telles quelles de leurs auteurs, il a voulu vraiment être l'historien de cet essai de science, et comprendre quelle réalité pouvaient atteindre les expériences et les mesures que l'on avait faites. D'après lui, cette réalité n'est nullement *l'intensité de la sensation*, pour la bonne raison que cette intensité n'existe pas; la plupart des recherches psychophysiques se rapportent aux *erreurs d'observation*, et ce dernier jugement est bien, en effet, la conclusion qui semble se dégager de l'histoire que M. Foucault a retracée avec une parfaite conscience et un grand luxe d'information; on lui saura d'autant plus gré de ces informations qu'il faut plus de vertu pour aller les chercher ailleurs que dans son travail; en fait, ce sont les erreurs d'observation qui se trouvent, d'ordinaire, avoir été étudiées par les psychophysiciens. Ceux-ci ne s'en sont pas toujours douté et semblent, tout au contraire, s'être figuré parfois que les physiciens et les astronomes, qui se sont toujours préoccupé et se préoccuperont toujours des erreurs d'observation, avaient, en étudiant ces erreurs, fait de la Psychophysique sans le savoir, si bien que, d'après Fechner, le problème fondamental de la Psychophysique aurait été résolu avant que d'être posé.

Mais peu importe ceux qui ont su, ou n'ont pas su, ce qu'ils faisaient. L'étude des erreurs d'observation n'en est pas moins capitale, et il est peut-être bon qu'elle soit entreprise et reprise par des esprits divers ayant des habitudes différentes, par des hommes de science rompus au maniement des instruments de précision comme à l'interprétation des tableaux numériques, par des psychologues familiers avec les analyses subtiles, par des physiologistes aussi qui connaissent à fond les organes des sens et même, s'il s'en trouve après Helmholtz, par des gens qui possèdent toutes ces qualités, et d'autres encore. C'est une simple truisme que de dire que le progrès des sciences physiques est lié aux résultats d'une étude qui peut fournir les moyens de diminuer ou d'éliminer quelque peu les erreurs d'observation. L'imperfection de nos sens et des instruments de mesure a joué un rôle utile dans la constitution des sciences physiques en obligeant les savants à porter uniquement leur attention sur la partie la plus grosse des phénomènes, et, pour ainsi dire, sur le premier terme des séries qui les représentent : ainsi a pu naître et se confirmer cette croyance dans la simplicité des lois naturelles qui a soutenu pendant longtemps l'enthousiasme des travailleurs. Aujourd'hui les sciences sont assez avancées, la valeur théorique et pratique de leurs résultats est assez éprouvée pour que les travailleurs puissent abandonner cette croyance naïve : la foi dans le déterminisme des phénomènes qu'ils étudient leur suffit; mais à mesure qu'ils veulent pénétrer plus avant dans ces phénomènes, ils doivent inventer des procédés de mesure de plus en plus précis ; si le

mouvement qu'a créé Fechner ne s'arrête pas et permet quelque jour d'obtenir cette précision désirée, peut-être faudrait-il conserver quelque reconnaissance pour le fondateur de la Psychophysique. « S'il est vrai, dit en términant M. Foucault, qu'il a échoué dans son entreprise spéciale de fonder la Psychophysique comme science exacte, son échec est de ceux que seuls peuvent subir les hommes de génie. » Je ne sais si cette consolation aurait suffi à Fechner, ni s'il y avait droit ; mais il faut pardonner aux historiens de s'éprendre un peu trop de ceux qu'ils étudient ; et c'est encore là une illusion utile, qu'ils peuvent perdre sans inconvénient, dès qu'ils l'ont exprimée et qu'ils ont terminé leur œuvre.

L'idée dont s'est enthousiasmé Fechner a germé dans la tête de très grands mathématiciens, parmi lesquels M. Foucault cite Daniel Bernoulli, Laplace et Poisson. Laplace veut que l'on distingue, dans le bien espéré, la valeur relative de la valeur absolue : « celle-ci, dit-il, est indépendante des motifs qui la font désirer, au lieu que la première croit avec ces motifs.

« On ne peut espérer de règle générale pour apprécier cette valeur relative ; cependant il est naturel de supposer la valeur relative d'une somme infiniment petite en raison directe de sa valeur absolue, en raison inverse du bien total de la personne intéressée. En effet, il est clair qu'un franc a très peu de prix pour celui qui en possède un grand nombre et que la manière la plus naturelle d'estimer sa valeur relative est de la supposer en raison inverse de ce nombre », et plus loin « ... mais l'avantage moral que peut procurer une somme espérée dépend d'une infinité de cir-

constances propres à chaque individu et qu'il est impossible d'évaluer. La seule considération générale que l'on puisse employer à cet égard est que, plus on est riche, moins une somme très petite peut être avantageuse, toutes choses égales d'ailleurs. Ainsi la supposition la plus naturelle que l'on puisse faire est celle d'un avantage moral réciproque au bien de la personne intéressée. C'est à cela que se réduit le principe de Daniel Bernoulli; principe qui, comme on vient de le voir, fait coïncider les résultats du calcul avec les indications du sens commun, et qui donne le moyen d'apprécier avec quelque exactitude ces indications toujours vagues ».

On voit combien les paroles de Laplace étaient prudentes : assurément il n'était pas la dupe de la relation

$$y = \mathrm{K} \log \frac{x}{h}$$

entre la *fortune physique* x et la *fortune morale* y, qu'il déduit des principes précédents. La loi de Fechner, qui relierait l'intensité de la sensation y à l'excitation x, a la même forme ; mais ceux qui, pour donner plus d'autorité à cette loi, veulent la placer sous l'invocation de Laplace, ne feraient pas mal de rappeler la réserve du grand géomètre, et de s'en pénétrer.

On trouvera, dans le livre de M. Foucault, d'intéressants détails sur les différents travaux dont les conclusions se rapprochent plus ou moins de la loi célèbre que Ernest Heinrich Weber a formulée d'une façon précise, et sur laquelle je voudrais m'arrêter un instant.

Si l'on observe une quantité A qui varie très

peu à partir d'une valeur fixe α, on ne s'aperçoit d'aucun changement quand les variations sont très petites ; le changement n'est apprécié qu'à partir d'un minimum de variation de la quantité observée : ce *minimum perceptible* dépend de α et l'on peut ainsi le représenter par $\varphi(\alpha)$; que ce minimum perceptible soit assez difficile à déterminer, c'est ce dont personne ne doutera et ce que les expériences décrites par Foucault montrent clairement. Il paraît toutefois qu'on parvient, dans un grand nombre de cas, à le mesurer avec une exactitude suffisante. Les psychophysiciens Fechner, Wundt, et bien d'autres ont imaginé et réalisé pour cela un très grand nombre d'expériences, dont quelques-unes sont fort ingénieuses. La loi de Weber consiste en ce que le rapport $\frac{\varphi(\alpha)}{\alpha}$ est constant. Les expériences montrent que cette loi n'est qu'approchée. Qu'il en soit ainsi, c'est ce qui ne peut étonner personne; la façon approximative dont elle se vérifie, entre certaines limites, n'en reste pas moins très intéressante.

En dehors du défaut de précision avec lequel peut être obtenu le numérateur du rapport $\frac{\varphi(\alpha)}{\alpha}$, la forme même de la loi de Weber et la généralité avec laquelle on prétend l'énoncer, montrent assez qu'elle ne peut être qu'approximative, qu'elle ne peut être qu'une sorte de loi de tendance. En effet, si elle est vraie avec un mode particulier de mesure adopté pour la grandeur A, elle ne sera pas vraie pour tous les autres modes de mesure qu'on peut imaginer : le rapport $\frac{\varphi(\alpha)}{\alpha}$ ne jouit sans doute pas de la propriété

de rester constant quand on y fait un changement de variable quelconque. Dans chaque série d'expériences instituée pour confirmer ou infirmer la loi de Weber, on dit bien, sans doute, quel mode de mesure on a adopté, mais pourquoi est-ce ce mode-là que l'on a adopté, pourquoi cette graduation plutôt qu'une autre et comment arrive-t-il que, dans des ordres de recherches très différentes, cette loi se vérifie, même grossièrement? Dans certains cas, il y a des modes de mesure qui s'imposent naturellement, en quelque sorte. S'il a à mesurer une longueur, un physicien prendra, par exemple, une règle divisée en millimètres ; il ne lui viendra pas à l'esprit de prendre une règle où seraient marqués, à la place des nombres de millimètres, les logarithmes de ces nombres ; mais chacun sait que, pour bien des quantités, la graduation est arbitraire et les raisons plus ou moins profondes qu'il y a pour adopter une graduation plutôt qu'une autre ne sont pas en cause ici. Ce qui importe essentiellement, c'est de faire correspondre toujours le même nombre à la même quantité, et toujours un plus grand nombre à une quantité plus grande. Les nombres que l'on fait ainsi correspondre aux divers états de la grandeur ne sont pas, à proprement parler, des *mesures* de ces états, comme dans le cas des longueurs, mais des *signes*, au moyen desquels on marque et on reconnaît ces états. Si la loi de Weber reste à peu près vraie, entre certaines limites, pour des phénomènes d'ordres très différents, cela tient sans doute à ce que, sous des conditions mathématiques bien connues, la graduation adoptée est à peu près indifférente : si l'on reste entre des limites où

les différences entre les nombres marqués sur la première échelle sont proportionnelles aux différences entre les nombres correspondants marqués sur la seconde échelle, il peut être indifférent d'adopter une échelle ou une autre. Mais si c'est grâce à cette raison que la loi de Weber reste vraie, son caractère apparaît clairement : elle ne peut être qu'une loi grossièrement approchée ; au reste, en consultant les nombreux tableaux contenus dans le livre de M. Foucault, on reconnaîtra que, sur ce point, pour parler comme Laplace, les résultats de l'expérience coïncident avec les indications du sens commun.

Ces indications que j'ai essayé de développer, supposent que dans le rapport $\frac{\varphi(\alpha)}{\alpha}$ qui figure dans la loi de Weber, le dénominateur α est une de ces différences, dont il vient d'être question, et qui pourraient être remplacées sans inconvénient par des différences proportionnelles. Dans un passage de son livre, lorsqu'il parle de *la clarté des perceptions différentielles* (p. 293), M. Foucault regarde effectivement comme une différence le dénominateur du rapport : mais il ne paraît pas que beaucoup de ceux qui ont étudié la loi de Weber se soient préoccupés de ce point; où est le zéro, l'origine de la grandeur A, mesurée par le nombre α, qui figure dans le rapport $\frac{\varphi(\alpha)}{\alpha}$? J'entends bien que, pour certaines grandeurs, les longueurs par exemple, il y a un zéro naturel ; mais on sait assez qu'il n'en est pas toujours ainsi. Les psychophysiciens appellent habituellement cette grandeur A, que l'on veut mesurer, *l'excitation ;* α est la mesure de l'exci-

tation. Cette terminologie est assez fâcheuse, et l'on ne voit guère, à vrai dire, en quoi une longueur de 10 millimètres est plus *excitante* qu'une longueur de 5 millimètres ; quoi qu'il en soit, c'est peut-être l'emploi de ce terme, dont je ne craindrai pas de me servir dans la suite, qui a empêché les psychophysiciens de se poser cette question : où est le zéro de l'excitation ? la réponse sous-entendue était trop claire : l'excitation est nulle quand nous ne percevons rien, dans le silence s'il s'agit de son, dans l'obscurité s'il s'agit de lumière ; il y aurait à dire sur cette réponse que je prête bénévolement à des gens qui n'y ont peut-être pas pensé : car, enfin, s'il s'agit, par exemple, de la hauteur des sons, y aurait-il deux zéros, là où nous commençons de percevoir les sons, et là où nous cessons de les entendre, grâce à leur acuité ! Mais laissons ces cas singuliers : même s'il y a une origine naturelle, ce n'est peut-être pas à partir de cette origine qu'il convient de compter les *excitations*, et il semble que la loi de Weber, en l'admettant, donne un renseignement sur la place de l'origine qu'il convient d'adopter. Si le rapport $\frac{\varphi(\alpha)}{\alpha}$ reste constant, $\varphi(\alpha)$ doit devenir nul en même temps que α ; d'où il suit que, pour le zéro de l'excitation, nous pouvons percevoir les plus petits accroissements de l'excitation, que notre sensibilité est infinie. Elle n'est infinie nulle part, cela est bien certain ; mais si elle est maximum quelque part, c'est là, sans doute, qu'il faut placer l'origine, pour que la loi de Weber soit la moins fausse possible. Cette origine variera peut-être avec les gens, avec leurs habitudes, avec leurs degrés d'exer-

cice; pour tel ordre de phénomènes, il y aura peut-être plusieurs maximums de sensibilité, et il conviendra, entre certaines limites, de choisir une origine et une autre origine entre d'autres limites. Qu'il soit possible de tirer quelque chose, dans la voie que j'ai essayé d'indiquer, des recherches sur le maximum de la sensibilité qu'a relatées M. Foucault, c'est ce que je me garderais bien d'affirmer.

Quoi qu'il en soit, c'est de cette loi de Weber, regardée comme générale, que Fechner est parti; il en a transformé l'expression grâce à une hypothèse, ou à une affirmation, que je n'ai jamais pu regarder que comme une pure définition : cette affirmation, c'est que le minimum perceptible $\varphi(\alpha)$ correspond à des accroissements égaux de l'intensité de la sensation.

« La différence de sensation, dit-il, reste égale, quand le rapport des excitations reste égal », et ailleurs : « Une différence entre deux excitations, différence que l'on peut regarder comme une addition positive ou négative à l'une ou à l'autre des excitations, est toujours sentie comme également grande, ou bien donne la même différence de sensation; si son rapport entre les excitations entre lesquelles elle existe reste constant, de quelque façon que sa grandeur absolue se modifie [1]. » Si ces affirmations avaient un sens précis, si elles étaient vraies, il est bien évident que le nombre qui mesure l'intensité de la sensation serait proportionnel au logarithme du nombre qui mesure l'intensité de l'excitation ; mais les mots *différence et accroissement de la sensation*

1. *Elemente der Psychophysik*, p. 134, citation de M. Foucault.

n'ont pas de signification claire ; en tout cas, ils n'ont pas par eux-mêmes de signification mathématique ; sans doute nous parlons bien de la différence entre une sensation et une autre sensation, comme nous parlons de la différence entre une vache et un ruisseau ; cette différence-là n'a rien à faire avec la soustraction ; de même pour l'accroissement, il n'est nullement conçu comme résultant d'une addition. Ces mots ne peuvent prendre une signification mathématique qu'en introduisant des définitions. C'est la façon même dont Fechner déduit sa loi logarithmique de la loi de Weber qui peut nous renseigner sur le sens de ces définitions. Je modifierai quelque peu, d'ailleurs, la forme de cette déduction, mais avec le seul désir, si je l'ai bien comprise, de mettre en lumière les conventions qu'elle implique.

Admettant qu'à chacune des sensations qui correspondent aux diverses valeurs α de l'excitation A corresponde un nombre $\beta = f(\alpha)$, ce nombre devra rester le même tant que A reste compris entre α et $\alpha + \varphi(\alpha)$ puisque, alors, la sensation reste la même ; il devra changer quand A atteint $\alpha + \varphi(\alpha)$ et deviendra alors $\beta' = f[\alpha + \varphi(\alpha)$. Fechner admet que la différence

$$\beta' - \beta = f[\alpha + \varphi(\alpha)] - f(\alpha)$$

est indépendante de α ; il est clair que c'est là une condition imposée arbitrairement, et *par définition*, à ce qu'il appellera *l'intensité* β *de la sensation ;* cette définition semble avoir été justifiée par la vue suivante : la différence au sens vague, entre les sensations qui correspon-

dent aux excitations α et $\alpha + \varphi(\alpha)$ est également sentie, quel que soit α ; les mots *également sentie* veulent dire, en admettant, bien entendu, la loi du seuil, que l'on ne s'aperçoit d'aucune différence (au sens vague), que la sensation reste la même, tant que l'excitation variant à partir de α, on n'a pas atteint la valeur $\alpha + \varphi(\alpha)$, et, au contraire, qu'on s'aperçoit de quelque chose, que la sensation change, dès que l'on a atteint cette valeur, et cela quel que soit α en remplaçant la différence (au sens vague) par une différence arithmétique, et les mots, vagues aussi, *également sentie*, par le signe $=$, on parvient à l'énoncé mathématique qui précède. Qui ne voit là des conventions arbitraires ? Les conventions sont libres, et si Fechner s'était borné à dire que les siennes étaient les plus simples de toutes, et même naturelles, il n'y aurait eu qu'à juger la valeur des conclusions qu'il en aurait tirées, mais il y a quelque exagération à les présenter comme nécessaires.

Le reste est facile : Si l'on regarde dans l'expression

$$f[\alpha + \varphi(\alpha)] - f(\alpha)$$

(supposée indépendante de α) $\varphi(\alpha)$ comme une quantité infiniment petite et si l'on remplace cette expression par $\varphi(\alpha) f'(\alpha)$, si l'on se rappelle enfin que $\frac{\varphi(\alpha)}{\alpha}$ est une constante, d'après la loi de Weber, il est clair que $\varphi(\alpha) f'(\alpha)$ devra être regardé comme indépendant de α et que, par conséquent, $\beta = f(\alpha)$ sera de la forme

$$\beta = k \log \frac{\alpha}{h} .$$

k et h étant des constantes. Cela revient, en somme, à définir l'intensité de la sensation par la formule précédente[1] et à justifier cette définition par quelques considérations que le lecteur ne regardera peut-être pas comme dénuées de toute valeur, bien qu'il s'y mêle quelques confusions de mots. Le caractère de la loi de Fechner apparaît nettement dans une application que l'on en fait en astronomie ; j'emprunte au *Cours d'astronomie* de Baillaud[2] les quelques lignes qui suivent. Il s'agit de l'échelle des grandeurs des étoiles :

« L'échelle des grandeurs, depuis l'invention des télescopes, a été prolongée successivement par d'habiles observateurs qui, dans notre siècle, se sont accordés mieux qu'on ne pourrait le croire *a priori*. Il est à signaler cependant que la plupart des étoiles de sixième grandeur du Catalogue de Lalande sont notées à la septième grandeur par Piazzi. Les mesures photométriques faites depuis un petit nombre d'années par des méthodes très diverses ont donné des résultats peu différents de ceux qu'avaient obtenu Argelander à Bonn par l'estimation directe.

« On pourrait aujourd'hui adopter la définition suivante :

« *La différence* ΔM *des grandeurs de deux étoiles d'éclats* A *et* B *est*

$$\Delta M = \frac{1}{0{,}4} \log \frac{A}{B}.$$

« Cette règle, proposée par Pogson, indique

1. *Revue scientifique*, 2e série, t. VIII, p. 877 ; 1875. (Plus haut, p. 134.)

2. Seconde partie, p. 484.

que les grandeurs croissent en progression géométrique. La différence d'une grandeur correspond à un rapport d'éclats égal à 100,4, ou sensiblement 2,5 ».

Il n'est pas douteux que cette *définition*, arbitraire si l'on veut, est justifiée, dans une certaine mesure, par le classement des étoiles en étoiles de première, seconde, troisième, etc., grandeurs, et par ce fait que la série des grandeurs, qui constitue une progression arithmétique, correspond, au moins grossièrement, à une progression géométrique d'intensités lumineuses, mesurées par la photométrie. Ce dernier fait était pour Fechner, un argument essentiel en faveur de sa théorie, pour les besoins de laquelle il n'a sûrement pas été inventé. Il n'est vrai, sans doute, que grossièrement, et encore convient-il d'ajouter que *l'éclat*, pour ce qui est des étoiles, dont les rayons lumineux sont très différemment constitués, n'est pas une quantité bien définie. Si cette notion de *l'éclat* était précise, la définition de Pogson, qui ne diffère pas de celle de Fechner, transformerait en loi précise un fait grossier. Qu'y a-t-il dans ce fait ? Mais, aussi bien, y a-t-il quelque chose, autre qu'une règle mnémonique, dans la loi de Bode sur les distances des planètes au Soleil?

En restant dans le classement des étoiles en diverses grandeurs, on peut s'amuser à chercher des lois analogues à celles que Fechner prisait si haut, comme apportant à ses vues une éclatante confirmation. En reprenant, par exemple, le dénombrement des 314.925 étoiles de la *Bonnerdurchmusterung* qu'a fait Littrow, on remarquera, si l'on veut, que les nombres d'étoiles de grandeur au moins égale à la seconde, à la

troisième, à la quatrième, etc..., forment grossièrement une progression géométrique de raison 3,5. Veut-on aller plus loin ? on remarquera que 3,5 ne diffère pas beaucoup du nombre 3,1, lequel, d'après M. Baillaud[1], est, à peu près, le rapport des temps de poses photographiques qui, correspond au passage d'une grandeur à l'autre. Il serait évidemment imprudent de tirer des conclusions théoriques de faits aussi grossiers.

Fechner s'est enivré de sa loi logarithmique, et ce breuvage lui a procuré des rêves bizarres et qui, sans doute, lui paraissaient grandioses. Ces rêves ont embrassé l'homme tout entier, puis rien moins que le monde et la « conscience de l'esprit universel, qui ne s'endort jamais... où la conscience humaine s'élève quand l'activité psychophysique de l'homme a atteint une certaine valeur par rapport à l'activité psychophysique du système universel »[2]. La patience avec laquelle il a institué et conduit ses expériences, la sincérité avec laquelle il les décrit sont d'ailleurs admirables. Faisant sans collaborateur ses expériences sur les poids, il devait placer lui-même le poids additionnel (afin de déterminer le minimum perceptible), de sorte qu'il savait lequel des deux poids était réellement le plus lourd : on pouvait croire que cette connaissance exerçait une influence sur le jugement ; mais Fechner affirme qu'il n'en était rien. « On s'en tient, déclare-t-il, à ce que disent les sensations comme à quelque chose d'objectif »[3].

1. *Comptes rendus*, t. CXXXII, p. 1094.
2. Foucault, p. 121.
3. Foucault, p. 39.

Après tout, il avait peut-être raison, et les observations qu'il faisait en lui-même, avec une si parfaite naïveté, valaient peut-être mieux que les réponses arrachées par d'autres savants à la complaisance inconsciente ou malicieuse de leurs aides ou autres *sujets*.

En parlant de la loi de Fechner, j'ai, pour me conformer à l'usage, employé les mots *excitation*, *sensation*. Mais M. Foucault observe très justement, à ce qu'il me semble, que, dans les expériences que l'on a faites à propos de cette loi, il ne s'agit pas de sensations à proprement parler, mais bien de perceptions, de jugements portés, non sur nos propres sensations, mais sur la grandeur d'objets extérieurs. S'il en est ainsi, tout l'édifice de Fechner s'écroule, car, si nous ne savons guère ce qu'est l'intensité d'une sensation, nous ne savons pas du tout ce qu'est l'intensité d'une perception. Dire qu'un jugement est plus grand qu'un autre, parce que nous jugeons qu'un objet est plus grand qu'un autre, serait assurément parler d'une façon peu raisonnable. Il peut bien entrer dans la perception des éléments mesurables (comme la durée) et M. Foucault en énumère un assez grand nombre, dont quelques-uns sont assez mal définis, mais le jugement lui-même est une opération trop complexe pour que le nombre lui soit applicable. Dans cette opération, la sensation que nous éprouvons et son intensité (si elle en a une). interviennent sans doute, mais mêlées à bien d'autres éléments, en particulier aux images que nous fournit la mémoire. La prétention de dégager, de cette opération compliquée, la pure sensation, semble insoutenable.

Si même cela était possible, le nombre serait-il, même théoriquement, applicable à la sensation? En d'autres termes, celle-ci a-t-elle une intensité? M. Foucault le nie absolument[1]. Peut-être convient-il de faire sur ce point quelques réserves. Sans doute, la sensation n'appartient pas à cette classe de grandeurs dont on peut définir l'égalité et l'addition, et auxquelles l'idée de mesure est directement applicable[2]. Rien n'autorise à affirmer qu'elle soit homogène et que, lorsqu'elle se renforce, quelque chose de pareil à ce qu'elle était s'ajoute à elle. Si, en changeant, elle change de nature, elle ne reste guère comparable à elle-même. Tout cela est entendu. Toutefois, il suffirait, en considérant des sensations d'une certaine espèce que, de deux sensations de cette espèce, l'une pût être regardée comme égale, inférieure ou supérieure à l'autre, en supposant vérifiées les conditions qu'implique l'usage de ces mots, pour que le nombre s'appliquât à ces sensations, pour que chacune d'elles pût être numérotée, spécifiée et reconnue par son nombre. Il ne faut pas s'étonner que M. Foucault n'ait su démontrer ni la possibilité théorique, ni l'impossibilité d'une correspondance entre la sensation et le nombre. Au reste, si même la possibilité théorique d'une telle correspondance était établie, la possibilité d'une Psychophysique n'en résulterait nullement; car il s'agit d'une sensation à peu près pure, à laquelle ne se mêle aucune perception claire, le moyen d'établir une relation entre cette sensation

1. Page 267; ailleurs (p. 144), il est un peu moins radical.

2. *Revue scientifique*, loc. cit., p. 1017. (Plus haut, p. 138.)

et l'excitation apparaît encore moins que le moyen de graduer la sensation. Il ne viendra sans doute à personne la prétention de chercher une relation numérique entre l'intensité d'un mal de dents et la nature de l'abcès qui le cause. S'il s'agit, comme dans les expériences que relate M. Foucault, de sensations qui sont masquées par les perceptions correspondantes, où notre attention est fixée sur le dehors, non sur le dedans, il semble bien impossible de se débrouiller dans la complication du phénomène.

D'après l'auteur, ce n'est pas l'intensité des sensations qui est mesurable, mais *la clarté des perceptions*. Le mot *clarté* est, paraît-il, mal choisi, et son emploi présente, au point de vue philosophique, quelques inconvénients. Si le mot *précision* n'avait pas pris dans la théorie des erreurs de Gauss, une signification déterminée, M. Foucault l'aurait sans doute adopté. Quoi qu'il en soit, pour définir cette *clarté*, M. Foucault commence par définir *l'erreur de reconnaissance*. Celle-ci est la différence entre la quantité qui est l'objet réel de la perception et la quantité qui est indiquée comme égale à la première : c'est à peu près la même chose que ce que l'on appelle d'habitude *erreur d'observation ;* mais quand on parle d'observations, on entend habituellement des mesures faites avec des instruments plus ou moins compliqués, et l'erreur dépend, d'une part des instruments, d'autre part de nous-mêmes et de nos sens. C'est cette dernière partie de l'erreur que l'auteur entend étudier, et l'introduction d'un mot nouveau n'est pas à blâmer. La clarté des représentations est, par définition, inversement propor-

tionnelle à l'erreur de reconnaissance qu'elles nous font commettre. Ainsi, comme je le disais en commençant, la Psychophysique, d'après l'auteur, aboutirait à une théorie, ou au moins à une étude des erreurs.

Sans doute, l'erreur de reconnaissance, ainsi définie, est un élément physique, susceptible d'être étudié et mesuré. Il reste fort compliqué. Il dépend de l'échelle de mesure Si l'on entend que l'observateur n'a pas cette échelle à sa disposition, l'erreur de reconnaissance dépendra de la mémoire de cet observateur; s'il l'a sous les yeux, sans pouvoir l'appliquer à la quantité qu'il veut mesurer, l'erreur de reconnaissance dépendra de l'éloignement de l'objet à mesurer et de l'instrument de mesure. S'il applique celui-ci à celui-là, le problème change encore.

Quoi qu'il en soit, le livre de M. Foucault constitue un effort méritoire pour débrouiller une matière très obscure. Il vaut non seulement par les idées propres de l'auteur, mais encore par la masse de renseignements qu'il contient. S'il nous raconte l'histoire d'une chose morte, l'auteur peut se dire que les choses mortes sont l'objet de l'histoire ; si la Psychophysique, en se transformant, est susceptible de revivre, je souhaite que M. Foucault y contribue.



DEUXIÈME PARTIE

ENSEIGNEMENT ET MÉTHODES

CHAPITRE VII

POUR LA SCIENCE LIVRESQUE

La science livresque ! Voilà une expression qui a fait fortune : savants, philosophes, pédagogues la répètent à l'envi, sur un ton très méprisant, et d'autres encore qu'elle dispense d'étudier les livres et qu'elle autorise à plaindre ceux qui s'y attardent.

On sait assez que le mot « livresque », avec son sens dédaigneux, est emprunté à Montaigne, qui était un terrible liseur. A la vérité, il savait lire : les anecdotes, les traits de mœurs, les réflexions qu'il fait sur lui-même et sur les autres, ce qu'il voit en lui et alentour lui rappellent les belles phrases de ses auteurs favoris ; le passage qu'il relit, dans sa librairie, au haut de sa tour, loin du bruit et des importuns, évoque les événements et les hommes auxquels il a été mêlé, les passions qu'il a ressenties, ou dont il a curieusement observé autour de lui le jeu tragique ou risible ; en lisant, il revoit et revit. A-t-il jamais parlé de « science livresque », est-ce lui qui a accouplé ces deux mots ? Je ne sais ; s'il l'a fait,

il ne voulait assurément point parler de notre science, dont il n'avait nulle idée. Mais c'est bien à la manière de Montaigne qu'il convient de lire aussi les livres scientifiques : la lecture doit évoquer le monde extérieur, et les phénomènes qui s'y passent doivent s'éclairer par ce que nous avons appris. A lire, Montaigne oubliait sa « colique » ; nous pouvons nous oublier et nous absorber aussi profondément dans la contemplation intelligente du milieu où nous sommes plongés et dont nous faisons partie.

Le mépris pour le livre, qui est à la mode, ne risque-t-il pas d'atteindre la science elle-même, et celle-ci ne peut-elle plus s'écrire et s'enseigner ? N'est-elle pas une suite d'idées qui se traduisent par des mots? Les savants vont-ils cesser de publier des notes où ils annoncent les résultats qu'ils viennent d'obtenir, des mémoires où ils expliquent leurs méthodes, d'amples traités où ils exposent leur conception d'une science qu'ils ont longuement méditée ? Estiment-ils que rien de tout cela ne vaut la peine d'être étudié? Dès qu'on énonce de pareilles inquiétudes, elles se calment par leur absurdité. Peut-être y a-t-il cependant quelque intérêt, pendant qu'elle dure encore, à examiner ce qui est raisonnable dans la nouvelle mode, et la façon dont elle s'est développée.

Berthelot racontait volontiers qu'il s'était astreint, dans sa jeunesse, à lire tout ce qui se publiait sur la chimie et à résumer ses lectures, pour son usage particulier. Cette besogne lui prenait deux heures par jour, au début, huit quand il y renonça, je ne sais plus à quel âge.

Nul doute qu'il lût alors avec une prodigieuse rapidité : toute la science qu'il avait acquise accélérait la vitesse naturelle de son intelligence; il ne pouvait manquer de distinguer, d'un coup d'œil, le développement à sauter, les pages à parcourir, le résultat digne d'être noté et, parfois, l'idée nouvelle sur laquelle il réfléchirait, en courant de son laboratoire à l'Institut. Pour savoir lire, il faut avoir beaucoup lu et beaucoup pensé.

C'est, sans doute, ce qu'ont fait tous les hommes qui dirigent un laboratoire de recherches, et qui en sont dignes. Ils continuent, pour une partie de la science qu'ils cultivent, de se tenir au courant comme ils peuvent et le mieux qu'ils peuvent : c'est à ce prix qu'ils savent les problèmes qui se posent, les méthodes qui réussiront à les résoudre, au moins partiellement; c'est parce qu'ils ont des connaissances étendues et variées qu'ils risquent d'apercevoir ces rapprochements d'où l'on dit que sortent les découvertes essentielles; mais ils détourneront avec raison leurs jeunes collaborateurs de rechercher une impossible érudition ; ils savent trop, par eux-mêmes, qu'on ne peut avoir tout lu, ni continuer de tout lire, et que beaucoup de lectures sont inutiles. D'ailleurs, par leur fonction même, c'est la découverte qui les attire : ce qui est connu, dès qu'il est connu, perd beaucoup de son intérêt; ils sont penchés sur ce qu'on saura demain, c'est vers cette science de demain qu'ils inclinent ceux qui leur demandent des conseils. Ils leur indiquent des sujets de recherche ; aux uns, dont il faut d'abord aiguiser l'habileté technique, des problèmes précis qui se

résoudront par des méthodes éprouvées, à d'autres des questions mal déterminées, où ce qu'il faut chercher se déterminera par l'étude même, peut-être à la suite de bien des efforts qui auront semblé inutiles. Tantôt ils laisseront leurs élèves livrés à eux-mêmes, tantôt ils leur indiqueront la raison d'insuccès qui pourraient amener le découragement, et d'un mot, les mettront dans la voie qui aboutit.

Ils cherchent à développer l'initiative de tous et exagèrent parfois le mérite des initiatives qu'ils ont fait naître. Quelques-uns de leurs élèves reconnaissent et n'oublieront pas ce qu'ils doivent à une conversation avec leur maître, à un mot, à une suggestion ; les mêmes, peut-être, se rendent compte de ce qui leur manque pour les recherches qu'ils ont entreprises ou qui les attirent, des connaissances théoriques qu'il leur faut acquérir et qu'ils acquièrent peu à peu, qui s'appellent l'une l'autre, qui s'accumulent dans leur esprit et finiront par s'ordonner. Ils causent entre eux, discutent les théories, échafaudent et renversent les systèmes ; chacun ouvre l'esprit de l'autre, féconde et est fécondé. Peut-être deviendront-ils des maîtres à leur tour.

D'autres resteront des collaborateurs qui, bien guidés, peuvent rendre d'excellents services. On pourrait citer, surtout à l'étranger, des laboratoires où, grâce, au nombre et à la conscience des travailleurs disciplinés qui s'y trouvent groupés, grâce aussi à l'importance des ressources matérielles, les recherches, systématiquement dirigées par un maître éminent, ont abouti à des résultats considérables.

D'autres n'ont pas le sens des idées générales;

mais, servis par un heureux hasard qui récompense à la fin leur patience tenace, ils rencontreront un fait intéressant. D'autres enfin, grâce à leur adresse technique, à leur intelligente habitude des instruments, des mécanismes ou des réactions, pourront contribuer au progrès de ces industries scientifiques, qui ne subsistent qu'en se perfectionnant.

Dans un pareil milieu, la passion de la recherche expérimentale s'exalte naturellement, et cela est bon, si même l'objet de cette passion ne mérite pas l'ardeur avec laquelle il a été poursuivi ; on y jouit de la poursuite même ; l'opinion, plus ou moins consciente, qu'elle vaut mieux que son objet, n'est pas toujours dénuée de critique. Quelques-uns, dont précisément les connaissances livresques sont insuffisantes, oublient que cet objet n'est pas la science, non pas même une partie de la science, mais bien un détail qui prendra sa place, se transformera, ou disparaîtra dans l'ensemble organisé, comme une parcelle de nourriture dans le corps vivant et croissant. L'acquisition de la moindre parcelle de vérité, de nourriture scientifique, est si importante qu'il faut se réjouir de voir tous ceux qui s'y emploient sentir aussi vivement qu'ils font la dignité de leur besogne ; il est juste que ce sentiment réconfortant soit partagé par tous ceux qui travaillent dans un laboratoire scientifique, même par ces serviteurs que la modestie de leur costume ou de leur origine, ou la conscience de ce qu'ils ignorent, empêchent habituellement de se hausser jusque-là.

La tendance à rabaisser la science devant la

recherche scientifique, qui se manifestait obscurément dans les laboratoires, a trouvé sa formule dans les écrits de quelques philosophes, dont l'esprit critique est très aiguisé et qui, parfois, sont aussi des savants. Parce qu'elle est *action*, ils regardent la recherche comme la vie de la science, dont elle n'est qu'une condition nécessaire. Eux aussi détournent leurs yeux de ce qui est acquis, de ce qui est déposé et fixé dans les livres, pour les attacher sur ce qui évolue ; ils nous rappellent avec raison la relativité de nos connaissances, ils se plaisent à nous en montrer les connexions compliquées, à rabattre les prétentions scandaleuses en établissant que, au point de vue de la pure logique, l'édifice de nos connaissances n'est qu'un enchevêtrement de cercles vicieux, où nous nous abritons provisoirement, de la façon qui nous est la plus commode. Mais pourquoi tiennent-ils à décerner des prix à nos facultés ? Leur désir d'exalter l'action aux dépens de la connaissance recouvre sans doute d'excellentes intentions morales. S'ils veulent dire, tout bonnement, qu'il y a moins de mérite à être intelligent que vertueux, j'en suis d'avis ; mais ils reconnaissent assurément que ce qui fait la valeur de l'action, ce n'est pas qu'elle est un geste, un mouvement, mais bien ses motifs et son but ; la science sert à peser ces motifs, à préciser ce but, à découvrir le chemin qui y mène : ils en tombent d'accord. D'un autre côté, l'acquisition de la science est essentiellement active ; elle est active par le désir et l'effort vers la vérité, par la soumission même à la vérité, dés que la vérité est aperçue ; elle est active au même titre que la découverte,

non au même degré ; elle est, elle doit être une *redécouverte*.

Le livre est le plus commode et le moins coûteux des instruments pédagogiques ; qu'on en ait abusé, qu'on ait abusé d'un enseignement oral qui ressemble trop au livre pour que je l'en distingue ici, cela n'est que trop certain. Je voudrais insister un peu sur quelques-uns des inconvénients qu'il présente.

Nous conservons toute notre vie la faculté de répéter des mots à demi compris, dont nous nous servons à peu près correctement, par habitude et par une sorte d'instinct logique : ce mot était à sa place dans telle phrase, il s'emboîtera tant bien que mal dans une phrase analogue. On peut s'amuser assez de soi-même ou de ses voisins en recueillant dans n'importe quelle conversation (sans parler des discussions métaphysiques) la multitude de mots qui ne représentaient assurément rien de précis pour ceux qui les ont prononcés ; nous répétons fréquemment des noms de fleur, de pays, d'institutions, d'hommes, de maladies, dont nous ne savons absolument rien et il ne nous vient pas à l'esprit de demander ou de chercher une explication. Les mots nous contentent. Cela n'est pas bien fâcheux dans une de ces causeries où l'on ne cherche qu'une suite d'impressions agréables ; les mots à signification indécise ou obscure peuvent très bien contribuer à ces impressions, et les poètes ne l'ignorent pas. Mais nous nous mêlons aussi de raisonner sur ce que nous ne savons pas, avec des mots que nous n'entendons point. Mme de Sévigné nous semble

extrêmement comique quand elle raisonne sur ses maladies ; ne prêtons-nous jamais à rire, dans de pareils cas ? Je ne parle pas des médecins. Cette aptitude à raisonner avec des mots et des signes vides de toute réalité a peut-être abouti à la création de la logique et de l'analyse mathématique.

Quoi qu'il en soit, la faculté de se servir utilement de mots qui ne sont guère compris est admirable chez les enfants; grâce à elle, ils apprennent à parler, ils pénètrent peu à peu le sens de tous ces mots qui ne représentent pas des objets familiers, qu'ils peuvent voir ou toucher et qu'on leur a nommés. Un mot inconnu les a frappés dans une phrase dont le sens général implique, pour ce mot, une signification qu'ils saisissent vaguement; ils le répètent, avec les mots qui l'entouraient, dans une circonstance analogue, puis autrement, et après quelques essais, dont la gaucherie est parfois charmante, finissent, tant bien que mal, par se faire comprendre et par se comprendre. Lorsque leur vocabulaire est assez étendu pour qu'il soit possible de leur expliquer les mots nouveaux par des périphrases, c'est encore l'usage qui leur apprend ce que la périphrase ne leur enseigne pas, les nuances qui distinguent les mots de sens voisins, les cas où ce mot convient plutôt que cet autre; pour fixer le sens d'un mot, ses diverses acceptions, les rapports des mots entre eux, il n'y a rien de mieux à faire qu'à varier les exemples. Dans une phrase, le sens de chaque mot n'est déterminé que par la phrase tout entière. Cela s'apprend peu à peu; apprendre à parler, c'est accumuler des cercles vicieux ; mais, aussi bien.

qu'apprend-on autrement ? Pourtant, l'enfant apprend à parler, à exprimer ce qu'il sent, et en l'exprimant il distingue mieux ce qu'il sent.

Plus tard, il continuera de s'instruire en lisant. Bien des mots et des phrases ne seront lus que des yeux ; s'il est vivement intéressé par ce qu'il comprend, il ne s'aperçoit pas toujours de ce qu'il ne comprend pas, ou il se contente de ne comprendre qu'à moitié, il devine ou croit deviner. A mesure qu'il se développe, qu'il a vu et senti, qu'il a lu davantage, il comprend plus et mieux, il devine plus juste ; il se rappelle ou rencontre à nouveau ce qu'il avait laissé de côté ; il y revient, il y réfléchit ; le sens des mots et des choses se dévoile ; la correspondance entre le langage et ses états de conscience s'éclaire et se précise. Cet état de grâce le soutient jusqu'au bout de ses études, sans en excepter les études philosophiques.

Pour que cette grâce opère, il importe que ce que l'écolier ne comprend pas disparaisse pour ainsi dire dans ce qu'il comprend. Comment y parvenir avec les manuels scientifiques, tout secs ? Notez qu'il n'est plus question ici, comme dans les œuvres littéraires, de sentiments que l'enfant a eus lui-même, qu'il a éprouvés ou pressentis, dont les uns suggèrent ou excitent les autres, qu'il peut reconnaître ; notez que la langue scientifique n'a pas la souplesse de la langue littéraire, qu'un mot n'a, ou ne doit avoir, qu'un sens et qu'on ne découvre pas ce sens précis par des déformations et des adaptations successives.

Sans doute, les auteurs des manuels scientifiques définissent de leur mieux les termes nou-

veaux ; ils répètent les explications, les exemples, multiplient les illustrations ; mais les phénomènes, les appareils, les êtres vivants, les organes sont si nombreux, si divers, si compliqués, que les définitions et les figures s'oublient, se brouillent dans une informe grisaille. Pour un bon nombre d'écoliers, les mots qu'ils lisent ou qu'ils entendent finissent bientôt par n'éveiller aucune image, aucune idée précise : le livre ou la leçon deviennent alors un abîme d'ennui. Les plus dociles ajoutent au supplice qu'on leur inflige la torture d'apprendre par cœur ce qu'ils n'entendent point ; c'est une torture à laquelle l'étude des langues étrangères nous accoutumait jadis. Certains mots, répétés plus souvent, surnagent avec un reste de signification. Les écoliers arrivent parfois, avec un peu de bonheur, à placer convenablement ces mots-là et à donner l'illusion qu'ils ont compris ; ne les blâmons pas trop ; j'ai déjà dit que nous continuons tous de faire comme eux ; mais n'oublions pas que le premier bénéfice à tirer de l'enseignement scientifique consiste précisément à distinguer ce que l'on comprend de ce qu'on ne comprend pas, à accepter la conclusion d'un raisonnement rigoureux, à ne pas se payer de mots dont on ignore la valeur et, si l'on parle pour ne rien dire, à s'en apercevoir. Combien d'écoliers y arrivent-ils, et comment auraient-ils une volonté assez tenace, une mémoire assez sûre, une puissance d'imaginer assez vigoureuse, comment lutteraient-ils contre leur tendance et leur habitude de se contenter de l'à peu près, s'ils n'ont pas d'autre ressource que le livre, écrit ou parlé ?

Pour assurer leur mémoire et fortifier leur

imagination, pour fournir des matériaux à leur imagination, il est indispensable de les familiariser avec les objets que l'on veut qu'ils se rappellent ou qu'ils se représentent. Il ne suffit pas de leur montrer de loin ces objets une fois ou deux; il faut qu'ils les voient sous toutes leurs faces, qu'ils les manient, qu'ils s'en servent, qu'ils les comparent et les identifient avec les figures schématiques qui sont dans leurs livres ou que leur maître dessine sur le tableau noir; ils saisissent sur ces figures la marche d'appareils ou d'organes dont une partie cache l'ensemble, qu'ils ne peuvent toujours démonter, remonter, disséquer et qui doivent être, entre leurs mains, autre chose que des joujoux qu'ils font marcher jusqu'à ce qu'ils les aient détraqués. Non seulement ils se rappelleront les objets, mais ils pourront s'en figurer d'autres analogues; une description ou un dessin leur suggérera une image précise; ils seront alors capables de lire.

En même temps, ils apprendront à chercher dans une expérience ce qu'il faut y voir, à distinguer, pour y porter l'attention, le fait essentiel de ce qui l'entoure, le fait essentiel qui tient toute la place dans la description du livre, mais qu'on n'aperçoit pas toujours sans peine, même dans une expérience préparée pour le mettre en évidence, et qui est bien autrement caché dans la complexité touffue des choses extérieures; il faut savoir lire les livres et les choses.

Mais les phénomènes, leur description, leur mesure même ne sont que la matière de la science; la science commence avec la loi, qui

met l'ordre dans les faits et qui les groupe, elle se continue dans la synthèse des lois particulières en lois générales, elle s'achève provisoirement dans une théorie.

Une loi ne concerne qu'un petit nombre de propriétés de l'objet auquel elle se rapporte ; elle ne tient pas compte des autres propriétés de cet objet, qui n'interviennent pas non plus dans les conclusions qu'on tire de la loi ; ces conclusions s'appliqueraient aussi bien à un autre objet, sur lequel on pourrait formuler la même loi. En les développant, on ne pense pas à la réalité de l'objet, on raisonne sur une abstraction, d'autant mieux que la loi est plus générale. Un aveugle peut étudier l'optique, en ignorant les sensations qui donnent, pour nous, tant d'intérêt à cette étude. Ne sommes-nous pas devant l'électricité comme l'aveugle devant la lumière ? A la réalité extérieure, nous substituons dans nos théories un monde abstrait où les symboles qui le peuplent sont définis par des propriétés et se prêtent aux raisonnements de la logique déductive, au raisonnement mathématique en particulier, quand la théorie est assez avancée. « La lune qu'on voit n'est pas celle qui m'intéresse », disait je ne sais quel astronome. Ce qui l'intéresse, c'est la loi de Newton, les équations qu'on en déduit, les transformations de ces équations, et quelques nombres, déduits de l'observation, qui sont pour lui le Soleil, la Terre, la Lune...

La vraie science est la science livresque : c'est dans les livres et dans la pensée de ceux qui les ont étudiés qu'est décrit et réalisé le monde intelligible, lumineux et transparent qui laisse voir et fait voir le monde réel, en l'éclairant et

le rapprochant de notre pensée ; c'est par l'étude et pour l'étude de ce monde réel, auquel il s'adapte de mieux en mieux en devenant de plus en plus intelligible, qu'il a été lentement constitué, qu'il s'enrichit chaque jour de découvertes nouvelles, tandis que, par l'effort d'une méditation persistante, les idées qui le dominent deviennent plus simples et plus claires. Reprendre contre la science écrite des arguments qui pouvaient servir contre la scolastique, c'est méconnaître la nature de cette science, qui tire sa certitude, d'une part de sa cohérence, d'autre part d'une confrontation continuelle avec la réalité, avec ce que nous voyons, touchons, utilisons. — Un moment viendra où notre astronome sera bien forcé de s'intéresser à « la Lune qu'on voit » : il lui faudra comparer les nombres qu'il a calculés avec ceux que donne l'observation ; il ne le fera pas sans quelque angoisse : devra-t-il reviser ses longs calculs, attendre et obtenir de meilleures données numériques que celles d'où il est parti, modifier la loi sur laquelle il s'est appuyé ? Et s'il a pu, pendant de longues années peut-être, dédaigner « la Lune qu'on voit », c'est que sa science spéciale est parvenue à une rare perfection. Il n'en est pas d'autre où le contact avec la réalité puisse être perdu si longtemps. Dans les sciences auxquelles ne s'applique pas ce merveilleux instrument des mathématiques, d'où l'on est bien sûr de ne tirer qu'une transformation de ce qu'on lui a confié, il convient de se défier un peu de la déduction, qui n'est pas toujours impartiale et qui penche vers ce que l'on veut prouver.

A coup sûr, ce qu'on met de soi dans le travail scientifique augmente la joie de ce travail; la plupart des savants sont très jaloux de leur liberté et ne se plaisent qu'aux tâches qu'ils ont voulues; ce goût de l'indépendance est parfois excessif et j'ai entendu d'excellents maîtres se plaindre de leur impuissance à imposer une discipline, à organiser des recherches systématiques. Il y a au moins une discipline qu'il faut savoir accepter, c'est celle qui résulte du passé, du travail antérieur, de ce qui est acquis. Ce n'est pas d'ailleurs une obéissance aveugle, mais un consentement réfléchi et volontaire que réclament le livre, la science faite et toujours imparfaite : celle-ci est soumise à une perpétuelle revision. Plus elle s'impose à l'esprit par sa clarté habituelle, plus elle invite, par ses imperfections et ses obscurités, à la mauvaise humeur, à la révolte, à l'espérance d'une découverte, d'une victoire sur l'erreur qu'elle contient encore. Jetez le livre, réfléchissez, observez, expérimentez; vous trouverez peut-être; c'est à lui malgré tout que vous devrez d'avoir cherché là où il y avait à trouver. Ne le méprisez pas si vous ne voulez pas ignorer la vigueur d'invention qui éclate dans les œuvres magistrales et la puissante beauté qui les pénètre, si vous ne voulez pas recommencer des recherches qui ont été faites et bien faites, aboutir à des conclusions sans intérêt, qui ne continuent rien et ne contredisent rien, ou qui sont inutiles parce qu'elles se déduisent logiquement de ce qui était connu.

Mais ne demandons au livre que ce qu'il peut

donner. On a remarqué[1], non sans finesse, que le mot « savant » n'avait plus son sens primitif : pour être un savant, il ne suffit pas de savoir, il faut trouver ou au moins s'efforcer de trouver. On a dit aussi, et cela est encore vrai, que le livre ou l'enseignement, par leur perfection même, risquent d'éloigner de la recherche. Une exposition très claire semble rendre tout facile, elle résume et cache des efforts multiples et successifs, elle ne renseigne point sur la peine qu'exige l'acquisition de chaque vérité nouvelle ; plus le sujet est important, plus la théorie est profonde, plus le lecteur sent le mensonge de cette facilité et sa propre impuissance à créer rien de pareil à ce qu'il étudie. Quelquefois la clarté n'est pas sincère ; une sorte de brouillard lumineux est répandu sur ce qui est obscur ; il empêche de voir les trous, même les abîmes. Sans être entachée de ce défaut grave, plus d'une exposition a le tort de n'éveiller aucune inquiétude, de laisser l'impression que l'œuvre est finie, que le sujet est épuisé, qu'il n'y a plus rien à faire : elle n'est pas suggestive. Là où tout est éclairci, il n'y a pas à chercher : c'est dans les régions à demi obscures, et que la lumière commence à pénétrer, qu'il faut aller à la découverte.

Demandera-t-on au savant qu'elle tente de décrire ce qu'il espère trouver, le chemin qu'il compte suivre, le travail inconscient que préparent ses observations, ses doutes, ses réflexions ? Il aurait honte. Et ne changera-t-il pas de che-

1. M. Appell, dans le discours prononcé en 1908 au congrès de l'Association française pour l'avancement des sciences. Voir *Revue du Mois*, t. VI, p. 129.

min à mesure qu'il avancera, ne découvrira-t-il pas autre chose que ce qu'il cherchait? Sait-il ce qu'il pressent? « Je plains, disait Pasteur, les gens qui n'ont que des idées claires[1]. » Et le même Pasteur n'a jamais rien publié qui ne fût lumineux, précis, minutieusement contrôlé. Les tâtonnements, la tension, les bonds de la pensée qui aboutissent à la découverte ne sont pas faits pour le livre. Ne demandons pas au livre une recette pour avoir du génie; demandons-lui de nous mettre en possession, sans trop de peine, en quelques jours ou en quelques années, d'une science qui s'est constituée par des siècles d'effort, et par l'effort des plus rares intelligences; demandons-lui le savoir, tout simplement.

J'ai déjà dit que le savant de profession ne s'intéresse presque plus à ce qu'il sait; il aurait tort de faire trop bon marché de son savoir, car il est essentiellement modifié par ce qu'il sait, même par ce qu'il a su et qu'il a oublié. Et cela est vrai de tous ceux qui savent. Le savoir, indispensable au savant pour ses recherches, à l'ingénieur pour ses applications, n'est le privilège ni de l'un ni de l'autre. La vérité scientifique n'est pas faite pour être connue seulement de ceux qui l'accroissent ou l'utilisent. D'autres qu'eux, dans la mesure de leurs forces et de leur temps, peuvent prendre plaisir à comprendre quelque petite chose de l'univers, à saisir l'enchaînement des phénomènes, à les voir s'ordonner dans une vaste théorie. Les savants auraient grand tort de dédaigner ces gens-là, qui les admirent, de railler leur science livresque et l'enthousiasme qu'elle

1. Je dois ce souvenir à M. le Dr Roux.

leur cause. Les philosophes et les moralistes ne manqueront pas de reconnaître que l'habitude de se représenter le monde sous une forme scientifique finit par modifier la façon d'agir. Quel événement a-t-il eu des conséquences plus profondes et plus lointaines que la conception de Copernic ?



CHAPITRE VIII

LES MATHÉMATIQUES DANS L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE

Les sciences ne pénètrent pas notre système d'études secondaires ; elles n'en font pas partie, elles lui sont ajoutées, et le prolongent hors de toute mesure. Leur enseignement ne répond ni aux besoins pratiques, ni aux besoins scientifiques, mais à des exigences, ou plutôt à l'idée qu'on se fait de ces exigences ; il ne prépare pas aux carrières, mais bien aux examens que l'on a mis devant quelques carrières. Tout se trouve faussé par là.

Les classes « préparatoires » sont remplies presque entièrement par les mathématiques. Confinées jusqu'à ces classes dans un coin exigu du plan d'études, plus négligées encore par les élèves que n'auraient voulu ceux qui leur ont attribué ce petit coin, les mathématiques sont les maîtresses du bâtiment annexe où l'enseignement scientifique a été relégué ; elles y tolèrent un peu de physique et de chimie.

La prépondérance des mathématiques dans les classes préparatoires ne tient pas à des raisons de fond ; elle résulte de ce qu'il y a, dans notre pays, quelques situations où il est impossible de parvenir si l'on n'a pas su faire montre, entre dix-huit et vingt ans, d'une connaissance approfondie

de certaines propositions de géométrie et d'algèbre. Il y a ainsi des chapitres de mathématiques qui remplacent, dans notre démocratie, les quartiers de noblesse qu'il faut montrer ailleurs. Une fois qu'on a fait ses preuves sur ces chapitres-là, l'espoir d'atteindre une situation élevée devient légitime ; il se change presque en certitude, après quelques nouveaux examens.

Pourquoi la sélection se fait-elle sur ces chapitres privilégiés ? Contiennent-ils une pierre de touche qui permette de distinguer ceux qui, plus tard, seront dignes d'exercer l'autorité ? Dans les conseils et les milieux universitaires, un siècle après l'Encyclopédie, on appelle éducation *générale* l'étude des grammaires grecque et latine, et la lecture de quelques textes ; on y tient encore une certaine correction de style, la facilité à traduire élégamment une page de Cicéron, ou à développer un lieu commun, pour la meilleure garantie d'une bonne intelligence. Estime-t-on ailleurs que cette garantie doive être cherchée dans l'aptitude à s'assimiler la Géométrie analytique ou la Trigonométrie, et que cette aptitude décèle sûrement ceux qui seront un jour les meilleurs ingénieurs ou les meilleurs officiers ? Une pareille opinion a peut-être germé dans quelques cerveaux, tant est répandue la manie d'expliquer et de justifier ce qui existe, tant on éprouve de satisfaction à découvrir des raisons aux choses et à trouver raisonnables les habitudes qu'on a ; mais je n'imagine pas qu'elle ait jamais traversé l'esprit de ceux qui ont organisé nos grandes Écoles : ils ont pensé à l'enseignement qui devait se donner dans ces maisons, enseignement élevé et tourné vers la pratique ; ils ont inscrit dans

les programmes les matières indispensables pour apprendre le calcul intégral, la Mécanique rationnelle, l'Astronomie, la Physique..., avec cette idée très juste que ces sciences étaient elles-mêmes indispensables à ceux qui doivent dominer le métier des hommes qu'ils auront à commander, comprendre les progrès scientifiques qui se réaliseront dans ce métier, et y contribuer. Ces vues étaient sages, comme aussi les programmes qui en étaient l'expression et qui ne représentaient alors qu'un petit nombre de leçons.

Quoiqu'on se plaigne souvent du contraire, ces programmes ont peu changé. De temps en temps, des hommes graves et compétents, très soucieux des intérêts sur lesquels ils sont consultés, se réunissent pour les reviser et les discuter, toujours avec l'intention de les alléger ; ils arrivent à déplacer un alinéa, quelquefois à en supprimer ou à en ajouter un autre. Il ne vaut pas la peine de se passionner sur ces détails, qui n'importent guère. Au fond, les programmes restent les mêmes, parce qu'ils énumèrent des connaissances dont ceux qui les ont rédigés ou qui les remanient savent qu'on ne peut se passer pour aller plus loin.

Mais c'est les titres seuls qui restent les mêmes; la matière qu'ils représentent s'est gonflée démesurément. Depuis quarante ans, les livres que les élèves ont entre les mains, les cahiers qu'ils remplissent de notes ont triplé de volume. Cet invraisemblable accroissement ne répond qu'à l'importance artificielle que nos examens confèrent aux matières dont les programmes sont la table. Jadis, l'enseignement qui se donnait dans les mêmes classes de nos lycées laissait l'impression d'une chose inachevée et imparfaite; il

était donné en vue de l'enseignement qui devait suivre, dans les grandes Écoles. Cette méthode était la bonne : aucune partie de la science n'a sa fin en elle-même ; le maître doit fixer sa pensée sur les prolongements de ce qu'il explique et mesurer ce qu'il dit sur l'importance de ces prolongements; c'est pour cela qu'on exige de lui des connaissances si étendues, très élevées au-dessus des sujets qu'il aura à exposer.

Les maîtres de nos lycées sont des hommes fort distingués, dont je n'ai pas à vanter ici le dévouement. Beaucoup avaient leur place marquée dans l'enseignement supérieur : ils ont choisi une carrière plus pénible; ils ont une lourde charge, dont ils sentent et aiment le poids ; ils savent ce qu'ils sont pour les jeunes gens qui leur sont confiés et qui leur devront une carrière ; la préoccupation de leur métier ne les quitte pas ; parce qu'ils sentent vivement leur responsabilité, que cette responsabilité est grave et immédiate, qu'elle se manifestera à la fin de l'année, souvent d'une manière irrévocable, ils se défendent de regarder au loin ; ils se donnent tout entiers à leur enseignement actuel ; ils y apportent trop de soins, trop de goût, trop de conscience. Ils veulent que cet enseignement se suffise à lui-même ; leurs leçons trop complètes et trop parfaites n'éveillent pas assez l'inquiétude, le désir de l'au-delà. Mais cette recherche du fini et de la perfection n'est ni la seule cause, ni la plus fâcheuse, du gonflement horrifique qui s'en produit.

J'ai déjà dit que nos classes préparatoires ne préparent pas aux Ecoles, mais aux examens que l'on a placés à la porte de ces Écoles. Toutes les énigmes posées à ceux qui se présentent devant

ces portes sontrecueillies, collectionnées, publiées discutées, commentées et, l'année suivante, vont grossir les cours qui, sans le talent de ceux qui les font, sans leurs efforts pour conserver aux choses une apparence d'ordre et d'enchaînement, ressembleraient à un recueil de devinettes, avec leurs solutions. Malgré ce talent et ces efforts, le recueil grossit terriblement; les détails foisonnent et pullulent, étouffent les idées essentielles. A mesure que les examinateurs inventent de nouveaux problèmes afin de reconnaître si les candidats savent appliquer les théories, les professeurs imaginent de nouvelles théories afin de résoudre plus facilement les problèmes des examinateurs. Qu'un candidat se serve d'une méthode pour répondre à une question qui ne la supposait nullement, que l'examinateur le laisse faire, puis l'interroge sur cette méthode afin de savoir s'il l'a comprise et s'il avait le droit de s'en servir, voilà une méthode de plus qu'il faut enseigner, sous prétexte qu'on la demande aux examens.

Ainsi, chaque année, les cours s'allongent; ils faut cependant qu'ils soient finis à la même époque, dans les premières semaines d'avril, puisque les examens commencent à la fin de mai. Il faut que le maître fasse des efforts surhumains pour se hâter, entasser plus de choses en moins de temps, gagner une heure. S'il est malade pendant quelques jours, voilà ses élèves compromis. Ceux-ci, le plus souvent, sont entrés sous sa direction avec une préparation très insuffisante; ils étaient pressés d'entrer dans la classe « préparatoire » pour pouvoir y rester plus longtemps, pour avoir plus de parties à jouer; ils y resteront jusqu'à ce qu'ils soient reçus quelque part, après

avoir roulé de concours en concours, ou jusqu'à ce qu'ils se sentent définitivement fourbus. La première année, ils ont été bien vite désorientés, ont perdu pied, se sont noyés ; ils recommencent, puis recommencent encore, ressassent les mêmes chapitres, font et refont les mêmes petits problèmes ou d'autres qui leur ressemblent, pâlissent sur les mêmes petites « questions d'examen ». Plus on va, plus il y a de matières à apprendre, plus le maître s'efforce d'aller vite, plus les novices ont de mal à le suivre, plus de fois il leur faut recommencer. On passe moins de temps dans les Ecoles que dans les classes préparatoires, beaucoup moins de temps au Calcul intégral et à la Mécanique rationnelle qu'à la Géométrie analytique. Plus élevée et plus utile est la science, moins on s'y arrête, moins on l'étudie, moins on l'applique. Rapidement enseignée, elle glisse sur des cerveaux fatigués, saturés, encombrés de cristallisations. Que reste-t-il à la plupart, de cet enseignement qu'il a fallu tant de peine pour recevoir ? — mais était-ce pour le recevoir qu'on a pris tant de peine ?

L'étudiant a terminé ses longues études littéraires, ou plutôt verbales ; que va-t-il faire ? Son inquiétude se double de l'angoisse qu'il devine chez ses parents ; il est plus ambitieux qu'il ne désire faire fortune ; l'image de quelqu'une de ces places qui sont entourées d'une juste considération, où l'entrée ne va pas déjà sans quelque gloire, traverse sa pensée et lui sourit. Elles sont sûres, et cela plaît aux parents. Sans doute l'accès en est difficile, mais, au moins, la voie à suivre est bien tracée : le jeune homme continuera d'étudier, il étudiera autre chose, mais de la même

façon ; il continuera d'aller en classe, de faire des devoirs, de passer des examens. Si même il manque un peu d'initiative, il se sent plein de volonté pour faire un travail bien réglé ; il ne recule pas devant la longueur et la continuité de l'effort. Il ne sait s'il a des aptitudes pour les mathématiques, auxquelles il n'a jamais goûté ; elles l'ennuieront peut-être ? Qu'importe ? Il est rompu à l'ennui, c'est un des résultats les plus sûrs de l'enseignement classique. Pour arriver à la place qu'il ambitionne, un seul moyen : entrer dans l'École qui y mène ; il y entrera, le voilà enrôlé dans l'armée des candidats. Il passera d'abord le baccalauréat ès sciences ; ce n'est pas une affaire. Maintenant, quel maître va-t-il suivre ? Quelle est la maison où la préparation est la mieux organisée, dans ses moindres détails, où l'on guide les élèves par la main, heure par heure, sans les quitter un instant, sans leur permettre de faire par eux-mêmes un pas qui les écarterait du but ? Quel est le professeur le plus renommé, non par son savoir, mais par ses succès, et par les moyens qui lui procurent ces succès ? Quel est celui qui se préoccupe le plus des concours et qui montre le plus cette préoccupation ? Quel est l'entraîneur le plus habile ?

Heureusement pour la justice et pour les carrières où les concours donnent accès, la meilleure réponse à ces questions ne fournit pas encore le meilleur moyen de réussir ; mais l'état d'esprit de ceux qui se les posent permet-il d'espérer qu'ils tireront de leurs études, de leurs efforts, de leur temps, quelque profit intellectuel, quelque bénéfice moral ? Croit-on que leur énergie va se tremper dans les exercices auxquels ils vont se sou-

mettre? Et que sera la science pour eux? — Un moyen d'arriver. — Au reste, qu'elle soit un peu méprisée, abaissée à n'être qu'un moyen, non un but, ce n'est pas pour déplaire à tout le monde.

*
* *

Par elle-même, l'étude des mathématiques contribue assurément à une bonne formation de l'esprit : tout d'abord, elle exerce singulièrement l'attention, et, par là, développe la volonté en même temps que l'intelligence; elle habitue à réfléchir longtemps sur un même objet, qui n'occupe pas les sens, à l'observer sous toutes ses faces et dans tous ses environs, à le rapprocher d'autres objets analogues, à saisir des liens ténus et cachés, à suivre dans tous ses détails une longue chaîne de déductions; elle donne des habitudes de patience, de précision et d'ordre; elle rompt l'esprit aux finesses de la logique, lui fournit d'incomparables modèles de rigueur, l'élève et le ravit par la contemplation de vastes théories, magnifiquement ordonnées, et toutes resplendissantes de clarté.

Encore ne faut-il pas oublier que les mathématiques traitent de concepts extrêmement simples et qui, par cette simplicité, s'éloignent infiniment du réel. Les mathématiques pures reposent uniquement sur la notion de nombre et, si l'on y veut joindre la géométrie, sur la notion d'espace : elles en tirent tout un monde, un monde dont la complexité est si riche et si inattendue, dont les perspectives lointaines et transparentes sont si belles que quelques esprits ne peuvent plus s'en détacher... Elles le construisent surtout par une suite

de généralisations : grâce à une extension toujours plus grande du sens des mots, les propositions établies au début de la science, tout en conservant la même forme verbale, s'élargissent étrangement dans leur signification. Cette extension même du sens des mots amène quelquefois un langage paradoxal : on parle couramment d'opérations qui, en un sens, sont impossibles, on spécule sur des éléments qui, en un sens, ne peuvent exister. Ce langage, auquel on initie trop tôt les jeunes gens, les étonne et les séduit; ils s'amusent de son absurdité apparente, s'émerveillent, à juste titre, des facilités qu'il apporte dans les raisonnements, s'habituent à le parler, sans le bien entendre, en se laissant guider par l'analogie, en ne se donnant ni le temps, ni la peine de réfléchir aux principes qui le justifient. Quelques-uns emportent peut-être de leurs études mathématiques cette conviction obscure qu'un raisonnement absurde peut conduire élégamment à la vérité.

Dans les applications rationnelles des mathématiques, interviennent les concepts de corps parfaitement solides, de corps parfaitement flexibles et inextensibles, de corps parfaitement élastiques, de fluides parfaits...; au caractère abstrait de ces concepts, à cette épithète de *parfait* qui les accompagne, on reconnaît assez combien ils s'écartent de ce qui est. Sans doute, ils nous sont suggérés par l'expérience ; mais, d'une part, dans l'infinie complexité des choses, le mathématicien a porté son attention sur une propriété unique, il a vidé les êtres dont il s'occupe de toutes leurs autres qualités pour n'en retenir qu'une seule; d'autre part, il a porté cette

propriété à sa perfection; le monde d'objets simples qu'il crée ainsi, sur lequel il spécule, n'est nullement le monde réel, sur lequel il lui serait impossible de raisonner de la même manière. Remplacer les problèmes réels, dont l'enchevêtrement est inextricable, par des problèmes simples, qui puissent être abordés, telle est la méthode constante des mathématiques appliquées; elle ne peut fournir que des solutions approchées, et ces solutions ne peuvent avoir de valeur pratique que pour les problèmes où les propriétés retenues par le mathématicien sont prépondérantes. Pour être comparée à la réalité, chaque position de problème et chaque solution doit être soigneusement discutée. Certes, on ne saurait trop admirer la grandeur des résultats qui ont été obtenus par cette méthode dans la connaissance du monde extérieur et l'audacieux génie de ceux qui en ont fait tant de belles applications, mais les dangers qu'elle comporte sont assez évidents : pour simplifier et résoudre un problème, on néglige ce qui embarrasse, et l'on arrive ainsi à négliger ce qui importe davantage. Que vaut alors la solution? Que vaut-elle surtout si, comme il arrive, elle est préconçue, si après se l'être imposée, on a pris et modifié les données, comme il fallait, pour y parvenir? Et que valent les gens qui y croient, à cause de l'appareil mathématique d'où elle est sortie, qui attribuent à cet appareil la vertu de créer des vérités, lorsqu'il ne peut que les transmuer, qui sont impuissants à juger ce qu'on y met comme ce qu'on en tire? Que valent leur confiance obstinée dans les résultats de tout calcul, de tout raisonnement qui a une tournure

mathématique, de toute déduction logique, et la dédaigneuse assurance qu'ils ont puisée dans l'habitude des vérités absolues ? Ils acceptent une hypothèse sans y regarder, ou la choisissent arbitrairement parmi des données incomplètes, surabondantes, contradictoires, raisonnent juste sur cette hypothèse, et ne s'étonnent jamais de leur conclusion.

La tendance à cette déformation intellectuelle qui résulte de l'exercice exclusif d'une seule faculté se montre jusque dans les jeux des jeunes gens qui se livrent à cet exercice. Jusque-là, ils avaient appris à écrire, non à penser; ils s'imaginent maintenant qu'ils apprennent à raisonner ; oui, mais à raisonner sur des formules, non sur des faits; ils n'emploient plus que ce mode de raisonnement, ne parlent plus que le langage mathématique; ils le transportent partout, par manière de plaisanterie; ils s'amusent à ce jeu, dont le fond n'est autre que la méthode des mathématiques appliquées, poussée jusqu'à la bouffonnerie, la substitution d'un symbole abstrait à n'importe quelle réalité; ils jouissent des stupéfactions qu'ils causent autour d'eux, affectent la tenue de celui qui raisonne avec certitude, du maître qui enseigne la vérité, et se laissent prendre à la comédie qu'ils jouent, dont ils finissent par être les dupes.

*
* *

Si les mathématiques, à elles seules, sont loin de suffire à former le jugement, la façon dont elles sont étudiées en vue des concours, l'obsession de ces concours et des légendes qui sont nées alentour dans un milieu de joueurs,

prêts à toutes les superstitions, risquent de détruire ce qu'elles ont de vraiment utile.

A l'examen, le candidat, dans un temps très court, doit montrer le résultat des efforts qu'il a faits pendant de longues années; pour réussir, il lui faut répondre rapidement aux questions qui lui sont faites et qu'il doit avoir étudiées, résoudre rapidement les problèmes qui lui sont posés, qui permettent de juger s'il est capable d'appliquer correctement les théories et d'avoir quelque initiative dans cette application. Que la rapidité des réponses soit appréciée des juges, cela est fort naturel; mieux un candidat aura les diverses parties de son cours à sa disposition immédiate, plus il aura fait d'applications, plus loin il aura poussé la solution d'un problème difficile, mieux il doit être noté. Le bon moyen pour lui d'acquérir cette allure rapide et dégagée qui, le jour de l'examen, disposera d'abord ses juges en sa faveur, n'est pas de la rechercher. Pour celui qui a quelque vivacité d'esprit, elle est le résultat certain d'une étude lente, approfondie : c'est par cette étude qu'il arrive à posséder vraiment les théories, dont l'ensemble et les détails finissent par être présents à son esprit; l'ensemble et les détails lui sont présents, parce que, en les étudiant, il a été assez consciencieux pour combler toutes les lacunes, dissiper toutes les obscurités ; maintenant tout se tient, tout est clair; chaque partie lui rappelle le tout et il voit chaque partie dans le tout. Parce qu'il a, maintes et maintes fois, appliqué les théories, qu'il s'est exercé à manier les outils qu'elles fournissent, il sait ce qu'il peut faire avec ces outils et comment il peut le faire.

Le travail intellectuel comporte une habileté d'ouvrier qu'il faut acquérir, qui s'acquiert par le travail même, et qui se manifeste par la sûreté, l'aisance et la promptitude. Ces qualités sont importantes ; elles résultent, pour les bons esprits, d'une bonne méthode de travail et il est juste qu'elles contribuent au succès de ceux qui les possèdent.

Mais comment les candidats en sont-ils arrivés à croire que la promptitude dans la réponse vaut par elle-même, indépendamment de la réponse, et qu'elle est la qualité dont on leur tiendra le meilleur compte? Sans doute, cette opinion est née dans la cervelle de quelque lourdaud, qui, le surlendemain de l'examen, aura retrouvé ses mots et ses idées, puis, quelques jours après, découvert, dans l'impatience de ses juges, la cause d'un échec qui l'avait d'abord plongé dans la stupeur. Il sera allé répétant qu'on ne lui a pas laissé le temps de réfléchir, et de dire ce qu'il savait. Son explication consolante a fait merveille. Ses compagnons d'infortune se sont jetés dessus. Dans nos concours, les refusés sont la majorité, il est juste que leur opinion l'emporte; revenus au lycée, ils l'imposent naturellement à leurs jeunes camarades, pleins de respect pour leur malheur et leur expérience; sous peine d'être abandonnés, les professeurs finissent par l'accepter et se voient obligés de présider aux sports de vitesse institués par leurs élèves.

Dès qu'une sottise triomphe, il ne manque pas de gens pour l'appuyer de bonnes raisons; il s'en est trouvé pour attribuer aux examinateurs, qui n'en peuvent mais, des intentions pro-

fondes ; c'est, dit-on, la promptitude dans le coup d'œil qu'ils cherchent, la rapidité et la fermeté dans la décision, les qualités les plus précieuses pour celui qui doit commander. Que ces qualités soient précieuses, j'en suis d'avis, mais les pauvres juges ont assez à faire à discerner les candidats qui savent et comprennent un peu de mathématiques : ils seraient fort empêchés de démêler parmi eux les grands capitaines. Même quand on passe des examens, il n'est pas bon de parler sans réfléchir ou de s'entêter dans une erreur ; la rapidité dans la décision n'est précieuse que si l'on se décide bien ; les mathématiques ne sont point une école de décision ; on ne s'y décide pas ; on y cherche la vérité.

Pour acquérir cette vitesse dans la réponse aux « questions de cours », le plus facile est d'apprendre son cours « par cœur », de manière à pouvoir le réciter automatiquement, sans y penser ; cette récitation a d'ailleurs d'autres avantages : le candidat parle « comme un livre » ou comme son professeur ; il est sûr de la correction de son langage, et il sait que cette correction est fort goûtée. L'étude des mathématiques, ainsi faite, au lieu de développer l'attention, développe la mémoire verbale.

Si le candidat ne comprenait rien à ce qu'il récite, l'examinateur s'en apercevrait bien vite, à la moindre objection, ou à la moindre application. Le candidat n'ignore pas que, pour réussir, il lui faut quelque intelligence des mathématiques ; il s'efforcera donc de comprendre en partie ce qu'il récite, et laissera de côté ce qui lui demanderait de trop longues réflexions. Or, ce qui prouve la vigueur de l'esprit, ce n'est pas

la faculté de saisir partiellement quelques propositions isolées, mais bien un vaste ensemble ; c'est la faculté de lier les éléments qui constituent cet ensemble et d'en connaître la subordination. Tout à l'encontre, l'étudiant arrive à préférer les démonstrations qui se suffisent à peu près à elles-mêmes, qui sont détachées du reste et ne risquent pas d'amener l'examinateur sur un autre terrain. Il mesure l'importance des questions au nombre de fois qu'elles sont posées aux examens ; il étudie avec prédilection celles qui reviennent souvent, où le juge retombe lorsqu'il est fatigué. Il n'apprend que des morceaux de mathématiques. Ne sachant rien qu'imparfaitement, ignorant la façon dont les théories se commandent et se pénètrent, l'ordre dans lequel elles se déduisent, ce qui doit précéder et ce qui doit suivre, il en vient à ne plus distinguer ce qu'il comprend vraiment, ce qu'il comprend à moitié, ce qu'il admet, ce qui est rigoureux, ce qui ne l'est pas ; distinguer cela, distinguer nettement ce que l'on sait et ce que l'on ne sait pas, est peut-être l'avantage le plus précieux qu'on puisse tirer de l'étude des mathématiques. Ce qu'il admet, il l'admet non parce qu'il le sait, qu'il en a fait sa chose, non pas même parce qu'il *veut* l'admettre, mais seulement parce qu'on le lui a enseigné. Il n'est pas convaincu par un raisonnement, il y croit. Il terminera ses études sans avoir appris qu'il n'y a pas, dans la science, d'autre autorité que la science elle-même, que la volonté plie devant un ordre, non la raison devant une affirmation ; il a asservi son intelligence à une autorité extérieure, alors que son maître lui interdisait cette soumission ;

il a méconnu la règle de « ne recevoir jamais aucune chose pour vraie, qu'il ne la connût évidemment être telle », alors que l'observance de cette règle était un devoir strict. Il risque d'ignorer toujours la dignité de la raison.

L'examinateur ne pose pas seulement des questions dont le candidat doit connaître d'avance la réponse, il lui pose aussi des problèmes : c'est la partie la plus essentielle de l'examen, celle où le candidat sera jugé non seulement sur ce qu'il sait, mais sur ce qu'il peut. La prétention de résoudre immédiatement ces problèmes, sans y avoir pensé, quelquefois avant d'en avoir compris le sens, est vraiment risible, et il est étrange qu'elle soit aussi commune. Cette fois encore, le candidat s'imagine qu'il faut parler tout de suite, écrire tout de suite des formules ou des équations sur le tableau noir ; il en sait d'innombrables, dont on est ébloui ; il a une foule de réponses toutes prêtes, qui lui permettent de commencer, et il va vite, vite, si vite que l'on ne peut le suivre ; il a fini, ou croit qu'il a fini, ou espère qu'on croit qu'il a fini.

C'est une explosion de toutes les matières que pendant trois ou quatre ans il a entassées dans son cerveau. A les entasser ainsi, il a fait une besogne déprimante, moins déprimante encore que l'espoir, peut-être inconscient, qui l'a soutenu dans ses dégoûts, l'espoir de tirer parti de sa mémoire, de tomber sur un problème dont il connaisse la solution, de bien débuter, de faire illusion par son assurance et l'étalage de son érudition, de deviner juste, grâce à une bonne chance, à un mot ou à un geste involontaire de l'examinateur.

Il y a là un mauvais état d'esprit. Les uns y échappent par leur talent même, qui leur fait mépriser ou ignorer les moyens factices de succès ; ils trouvent leur voie sans peine, y marchent à grands pas, arrivent vite et naturellement : c'est eux qui continuent la tradition glorieuse de nos Écoles. A beaucoup d'autres, il suffit de vivre, de connaître des devoirs et des responsabilités pour se ressaisir et se redresser. Ni le nombre, ni les vertus des uns ou des autres ne doivent nous empêcher de voir le mal là où il est.

Il est déjà ancien, mais il s'aggrave d'année en année par l'âpreté de la concurrence entre les candidats, par l'habileté même de ceux qui les entraînent. Il s'aggrave, malgré les avertissements répétés de tous ceux qui ont quelque responsabilité dans la direction des grandes Écoles, malgré les efforts méritoires des examinateurs qui en gardent l'entrée. Ces derniers ont toujours été des savants qualifiés. Que de noms illustres on pourrait citer, depuis cinquante ans! Que de talent et de conscience dépensés dans ces longs mois de lutte contre les candidats, où il faut arracher aux uns ce qu'ils savent, mettre à nu la faiblesse des autres, et surtout, dans la multitude de ceux qui se ressemblent, distinguer des nuances insaisissables, qui permettront le classement auquel il faut bien arriver! Quelle attention soutenue à ce qu'on entend, à ce qu'on dit, à ce qu'on ne veut pas dire ! Que de questions ingénieuses ou profondes, quelle variété dans ces questions, que de scrupules dans l'appréciation des réponses ! Et quelle preuve plus forte peut-on donner des vices d'un système que l'excellence

même des hommes qui l'appliquent et ne parviennent pas à atténuer ces vices?

*
* *

Ce n'est pas ici le lieu de discuter des palliatifs, dont quelques-uns d'ailleurs peuvent être utiles. C'est affaire aux spécialistes. Je crois que le mal est profond, qu'il est dans une fausse conception de l'enseignement secondaire, dans une fausse conception du rôle que les sciences doivent y tenir, enfin dans le prix excessif attaché aux concours, dans le formidable enjeu (la vie entière) de la partie qui se joue en quelques heures. Je n'ai touché jusqu'ici qu'à des points très particuliers, je demande au lecteur la permission d'élargir le sujet.

Le but de l'enseignement secondaire doit être de former les jeunes gens au travail qui occupera leur vie, à un travail intellectuel qui, le plus souvent, consistera à diriger, d'une façon plus ou moins immédiate, l'effort physique d'autres hommes. Seules, les sciences enseignent la bonne direction de l'effort, la voie où il y a moins de fatigue et plus de résultats. Le développement des applications scientifiques ne peut manquer d'amener un changement rapide dans la distribution de la richesse, et même d'être, bientôt, la source principale de la richesse. Arriver à ce que cette source soit plus abondante et profite à tous, non à quelques-uns, c'est une des formes sous lesquelles se pose le problème social. Que la solution d'un tel problème ne puisse être contenue dans une réforme de l'enseignement, qu'elle soit infiniment complexe, qu'elle exige

pour se réaliser une vision singulièrement plus claire que la nôtre des devoirs et des intérêts, qu'elle dépende moins du progrès économique que du progrès moral, je le crois assurément, mais on lui tourne le dos en continuant d'orienter l'enseignement vers la jouissance et la production littéraires.

*
* *

Est-il besoin de rappeler que nos lycées ont été constitués sur le modèle des maisons ecclésiastiques, pour former des fonctionnaires bien élevés, à une époque où, sauf les mathématiques, les sciences ne faisaient que de naître? Depuis lors les choses ont changé. On a pu, pendant près d'un siècle, ne faire attention ni à ces savants qui poursuivaient obstinément leurs expériences, leurs mesures, leurs calculs, leurs patientes constructions, ni à ces méditatifs qui s'apercevaient avec étonnement que l'univers, éclairé de lueurs nouvelles, ne se reflète plus dans leur pensée comme il faisait dans le cerveau de leurs ancêtres; les uns et les autres sont peu nombreux; ils ont des habitudes paisibles et se contentent d'avoir une vérité de plus à ruminer. Mais les découvertes scientifiques ont déchaîné les intérêts matériels; rien n'arrêtera la foule qui se rue à la conquête des forces naturelles, et il faut, aujourd'hui, s'entêter étrangement à fermer les yeux pour ne pas voir venir l'invasion qui, bientôt, précipitera les ruines. A ceux qui, demain, seront partout les maîtres, dans l'agriculture, le commerce ou l'industrie, qui posséderont la richesse matérielle et les idées fécondes.

la science fournit leurs armes : par elle, les conditions de la vie et du travail changent d'année en année ; ceux qui veulent vivre et travailler n'ont qu'à se plier à ces conditions nouvelles ; sinon ils n'encombreront pas longtemps la face de la terre.

Puisque l'importance pratique des sciences grandit de jour en jour, puisqu'elles s'accroissent très rapidement et que la durée de la jeunesse reste la même, elles prendront dans l'enseignement, bon gré, mal gré, une place qui est déjà occupée. Bientôt, il n'y aura plus que des métiers et des carrières scientifiques. Pour ne parler ici que des carrières auxquelles on commence de se préparer au lycée, le temps est déjà venu où l'intelligence de quelques vérités scientifiques importe plus au médecin que l'étymologie des maladies ou des remèdes, à l'avocat que la signification exacte d'un passage des *Pandectes*. L'opinion contraire, qui prévaut encore, semble bouffonne quand on réfléchit à la façon dont la médecine s'est transformée depuis trente ans, aux intérêts qu'ont à traiter ceux des avocats qui ne s'occupent pas seulement des crimes passionnels. Notre éducation littéraire n'est bonne qu'à former des professeurs, qui n'auront plus d'élèves dans la génération à laquelle ils s'adresseront.

C'est là une conviction qui dérange bien des habitudes et répugne à bien des goûts, mais qui s'impose à ceux qui regardent autour d'eux ; quelques-uns ont lutté longtemps contre elle et l'ont subie avec peine. Cela n'importe pas : devant l'inévitable, les regrets sont vains ; vaine est la jouissance que l'on goûte à gémir ; le talent que l'on dépense à faire partager aux autres cette

jouissance inutile est vain ; plus vaine encore, s'il est possible, est l'illusion de ceux qui vont répétant que l'éducation qu'ils ont reçue doit être, dans l'avenir, réservée à une élite. Il nous est sans doute agréable de croire que nous ressemblons à l'élite des générations à venir, élite dont nous ferions partie si seulement nous nous laissions vivre. Cette imagination fait sourire : l'élite d'une génération est faite d'hommes pareils à leurs frères, meilleurs et plus forts, capables de les comprendre et de les guider, et non de ceux qui se figurent avoir des plaisirs plus distingués.

Au lieu de s'attarder à ces gémissements ou à ces illusions, mieux vaudrait rechercher comment une *éducation* scientifique est possible, comment elle peut servir à former les esprits et les caractères, comment elle doit être distribuée suivant l'âge de l'enfant et le but que l'on veut atteindre, rechercher aussi ce qui lui manque et ce qui doit la compléter. C'est là, aujourd'hui, le vrai problème, qui dépasse de beaucoup la question du baccalauréat. Comment faire comprendre aux jeunes gens la dignité de la science, leur en faire goûter la beauté, le désintéressement en même temps que l'utilité ? Et, si l'homme ne vit pas que de vérité, comment faire jaillir de la science les sources d'émotion qu'elle contient ? Et si ces sources-là sont parfois trop haut, dans un air trop subtil et trop froid, dans des régions que nous n'atteignons pas souvent, et où nous ne pouvons demeurer, comment étancher notre soif ? Quelle sera la place de l'éducation artistique, sacrifiée par les pédants aux exercices littéraires ? Ni la contemplation de la vérité, ni les jouis-

sances esthétiques ne suffisent, si la vie est action. Pour agir, la science nous fournit des moyens, non des motifs. Les meilleures impulsions et les plus belles doivent être réglées et soutenues : l'enseignement ne peut se passer de philosophie ni de morale. Puis, continuellement, il nous faut juger et nous décider dans des circonstances si complexes que la science ne peut les démêler. Le maître qui enseignera les sciences positives saura-t-il montrer à ses élèves les précautions qu'exigent les méthodes scientifiques, les tâtonnements et les recommencements qui ont conduit à la certitude, la portée et les limites de ces méthodes, leur impuissance en dehors de leur domaine propre? Saura-t-il développer ce sens profond et obscur de la vie, cet instinct qui résume peut-être, au fond de nous-mêmes, des milliers d'existences antérieures, cet instinct qui devine, et, souvent, trompe moins que le raisonnement, auquel il supplée? Ne faudra-t-il pas faire une large part à d'autres connaissances, où s'exerce une critique aussi sagace et plus intuitive, où la signification des choses résulte de leur complexité, à l'étude des sociétés humaines, de leur vie actuelle et passée? Et si les littératures sont une des formes par lesquelles cette vie se manifeste et se continue, quelle place faut-il leur laisser et quelle place aux langues modernes, si nous voulons participer à la vie des autres nations, profiter de leur travail, être capables de lutter avec elles?

Les questions abondent et je n'ai pas d'autre prétention que d'essayer de les poser; mais il serait temps que les gens habiles voulussent y réfléchir, et prendre une fois leur parti de ce qui

est nécessaire; c'est à eux de préparer les solutions, s'ils ne veulent pas qu'elles soient brutalement imposées au nom d'intérêts matériels mal compris (et qu'eux-mêmes n'auront pas voulu comprendre), s'ils veulent éviter un âge de barbarie scientifique, platement utilitaire, où la science elle-même risquera de sombrer.

Les études littéraires proprement dites ne doivent pas être moins exceptionnelles que celles qui conduisent au Conservatoire de Musique ou à l'Ecole des Beaux-Arts. Au reste, dans un système d'éducation qui s'adresse au grand nombre, il n'y a pas lieu de chercher à développer la production artistique ou littéraire, mais seulement le sens de la beauté, la faculté d'en jouir. Quelques-uns, cela est certain, se trouveront perdre beaucoup à ne plus être nourris des lettres anciennes. Encore n'est-il pas certain que l'humanité soit si vieille qu'elle soit incapable de se créer des jouissances nouvelles et qu'elle en soit réduite au souvenir des émotions qui ont enchanté son enfance. Et puis, il faut bien avouer que les gens qui ont ressenti ces émotions, qui ont vraiment goûté les chefs-d'œuvre de l'antiquité, ont toujours été rares ; la multitude de ceux qui prétendent admirer ces chefs-d'œuvre est faite de ceux qui n'y ont trouvé que de l'ennui, et n'en ont pas tiré d'autre profit que de mépriser les êtres inférieurs auxquels cet ennui-là n'a pas été infligé. Depuis leur baccalauréat, quelle page ont-ils jamais relue, de ces maîtres dont le nom leur cause tant d'enthousiasme, mêlé de bâillements qu'ils ont peine à réprimer ?

*
* *

Une éducation vraiment générale doit comprendre les éléments de toutes les sciences, des sciences expérimentales comme des sciences mathématiques. J'ai dit plus haut la vraie raison de la prépondérance de ces dernières dans notre système d'enseignement ; mais je dois avouer que cette raison n'est pas la seule : les mathématiques sont vieilles, elles ont des siècles derrière elles ; on y est habitué ; quelques philosophes les ont cultivées avec succès et en ont dit du bien ; elles ont été accueillies sans trop de défiance par des gens qui n'y voyaient qu'un jeu de l'esprit, très innocent, une occupation sans conséquence à des subtilités « fort curieuses ». Elles ne s'adressent qu'à la pure pensée ; cela est économique et cela leur confère une sorte de noblesse, que n'auront jamais les autres sciences, qui sont encombrantes, attachées à la matière, où il faut regarder, toucher, manier, qui sont nées d'hier, qui se transforment rapidement, jusque dans leurs principes, et dont les éléments ne sont pas encore bien fixés. Enfin, logiquement, l'étude des sciences expérimentales doit être précédée de l'étude des mathématiques, dont elles ne peuvent se passer.

Cette dernière raison, qui assurera toujours aux mathématiques, dans tout enseignement élémentaire, une place importante, est la seule valable. Il n'en faut pas exagérer la force. Tous ceux qui ont pratiqué l'enseignement savent qu'il ne peut pas être parfaitement logique. Si l'on a des doutes à ce sujet, qu'on essaye d'imaginer un

enseignement logique, prenant l'enfant au berceau ! Tout effort vers la vérité doit être recommencé plus d'une fois, avec la vigueur acquise par l'étude même de cette vérité et de celles qui l'avoisinent. Sans doute les mathématiques sont nécessaires à l'intelligence des sciences expérimentales, mais non de toutes les parties de ces sciences ; et celles-ci peuvent très bien être enseignées concurremment avec les mathématiques, dont elles font comprendre l'intérêt par les problèmes qu'elles posent; non seulement elles peuvent être enseignées en même temps, mais elles doivent l'être, si l'on veut former les jeunes esprits, que les abstractions ne nourrissent pas suffisamment, à qui il faut des données réelles, des faits à distinguer, à comparer, à grouper, à ranger sous des lois moins vides que celles des mathématiques. Sans doute, les théories scientifiques ne peuvent être comprises que par des esprits déjà mûrs; mais il convient de commencer de bonne heure cette éducation des sens, cette habitude de l'observation, cette intuition de l'ordre des grandeurs et de l'importance relative des choses, que les uns n'acquièrent jamais et les autres trop tard. Cette première éducation ne vaut-elle pas, pour la pensée, les études de mots auxquelles nous contraignons nos enfants pendant tant d'années ?

Préparée ainsi dès l'enfance par l'acquisition de faits et de lois simples, non par la récitation de sèches nomenclatures, l'éducation scientifique proprement dite doit commencer dès que l'élève peut se hausser jusqu'à la compréhension des lois générales, l'enchaînement des théories ; à un âge où il n'est pas encore hanté par la préoccupation

d'une carrière, où il est capable de regarder les choses en elles-mêmes, d'une façon désintéressée. Elle doit se développer lentement, non s'enfler tout d'un coup dans la fièvre : elle doit se développer harmonieusement, dans tous les sens, si l'on veut conserver l'équilibre des diverses facultés.

Si les mathématiques sont admirables pour fortifier les facultés logiques, elles n'ont rien à faire avec l'esprit critique, qui ne s'exerce que dans la connaissance des faits, parce que cette connaissance est nécessairement incomplète ; l'esprit critique, le jugement, se perfectionnent au contraire par la pratique des sciences expérimentales, de leurs méthodes pour démêler le feutrage de la réalité, pour faire apparaître l'importance relative et la subordination des causes, pour diminuer les chances d'erreur, fixer le degré d'approximation des mesures et des lois qui les résument. L'examen détaillé d'une suite d'expériences se rapportant à un même objet, des précautions qu'elles ont exigées, des erreurs qu'entraîne l'oubli de ces précautions, des perfectionnements successifs qui ont été apportés, des corrections qui restent nécessaires, de l'incertitude qui subsiste dans l'interprétation des résultats, est une étude excellente. Elle s'imprimera sûrement dans l'esprit de l'étudiant s'il a réalisé lui-même quelques-unes de ces expériences, s'il a vu, touché, mesuré, s'il ne s'est pas contenté d'essayer d'imaginer ce qu'on lui dit, si ce n'est pas seulement des mots, mais des choses concrètes, déterminées, ayant une forme et une couleur, qui restent dans sa mémoire; s'il s'est demandé à lui-même ou s'il s'est fait expliquer par son maître pourquoi le résultat n'a pas été

conforme à la théorie, si ses insuccès comme ses réussites ont contribué à l'accroissement de ses connaissances, si, en un mot, l'enseignement des sciences expérimentales est vraiment expérimental, s'il a pour but d'apprendre les choses, non de dresser les élèves à répondre aux questions d'un examinateur[1].

L'étudiant sentira de lui-même la nécessité de développer ses connaissances mathématiques; il aura hâte de s'attaquer aux problèmes qu'on a posés devant lui, que, peut-être, il s'est posé à lui-même, de réduire les lois en formules, de transformer ces formules, de savoir en dégager les inconnues ; en entendant son professeur développer une méthode de géométrie ou d'algèbre, il aura la joie d'en saisir la portée, de tenir enfin un instrument qui lui manquait, dont il a hâte de se servir. Et s'il en vient à aimer les mathématiques pour elles-mêmes, pour leur beauté propre, s'il rêve de se donner à elles tout entier, il ne regrettera pas de soupçonner leur rôle dans la connaissance du monde réel, et de savoir qu'elles permettent de résoudre d'autres problèmes que ceux qui sont collectionnés dans les « feuilles d'examens ».

La dernière classe de nos lycées doit mettre les jeunes gens en mesure d'acquérir une instruction plus spéciale dans les Universités, dans les Instituts ou Ecoles techniques. Il y a aujourd'hui une tendance heureuse au groupement de ces « Instituts » autour des Universités, et l'on peut espérer que celles-ci aideront à réaliser cette

1. Un enseignement de cette nature fonctionne depuis plusieurs années dans les Facultés des sciences. Il s'adresse surtout aux futurs médecins. Ce qui se fait à l'Université peut aussi bien se faire au lycée.

communication entre la science, l'industrie et l'agriculture, qui, ailleurs que chez nous, commence à se faire, et qui, demain, sera pour tout pays une condition impérieuse d'existence. Mais le chemin du lycée à l'Université n'existe pas ; il est barré par la classe de « mathématiques spéciales » dont l'enseignement est tourné uniquement vers quelques examens, par une classe que l'on recommence trop de fois, et d'où l'on sort avec la connaissance trop détaillée de chapitres trop limités. Elle barre si bien la grande route qu'il a fallu faire des chemins de traverse et organiser, dans les Universités, des conférences où l'on enseigne, d'une façon élémentaire, ce que l'on enseigne au lycée d'une façon beaucoup plus complète ; inversement, on ne crée pas, dans les Universités, les chaires d'Algèbre ou de Géométrie supérieures qui devraient s'y trouver, parce que les sujets correspondants ont été par trop déflorés au lycée ; les deux enseignements, secondaire et supérieur, sont renversés. La classe de « mathématiques spéciales », si on veut lui conserver ce nom, qu'elle ne justifie d'ailleurs que trop, doit redevenir un passage qui mène, en particulier, aux grandes Écoles, mais qui mène aussi bien à toutes les carrières, où l'on a besoin d'une forte instruction scientifique et, en particulier, mathématique. Son programme, pour ce qui est des mathématiques, resterait à peu près le même ; c'est la façon dont ce programme est développé qu'il faudrait changer. Personne ne devrait rester plus de deux ans dans cette classe ; c'est déjà un an de trop. Est-ce qu'on redouble les années d'École ?

Les élèves n'y devraient entrer qu'avec une

forte culture scientifique. Pour développer cette culture, il faut du temps, et ce temps ne peut être trouvé qu'en abandonnant résolument le grec et le latin : prenons-en notre parti ; prenons notre parti de former une génération de travailleurs armés pour les luttes économiques qui rempliront le siècle prochain[1]. Il faut que ces travailleurs-là soient légion, et qu'ils renouvellent toutes les formes de la production.

Les élèves entreraient donc dans la classe de « mathématiques spéciales » avec une tout autre culture, un tout autre esprit qu'aujourd'hui ; ils verraient devant eux des carrières diverses ; ils recevraient un enseignement utile à tous, utile en soi, qui regarderait autre chose que les examens. Comment toutefois empêcher la préparation artificielle aux concours des Écoles, si le prix attaché à ces concours reste le même, si les individus ont le même intérêt à gagner ce prix, la même chance de le gagner en se soumettant à un entraînement factice, si les associations qui ont pour but la conquête de l'influence par des gens qu'elles ont façonnés suivant leur doctrine ont le même intérêt à faire pénétrer leurs anciens élèves dans les situations auxquelles l'autorité est attachée ? D'excellents esprits voudraient que la préparation fût organisée et surveillée par l'État. C'est le droit de l'État, qui a organisé les Écoles mêmes : il peut en régler l'accès et, en quelque sorte, les prolonger par devant. Une telle mesure n'a rien d'incompatible avec la liberté de l'enseignement[2].

1. Écrit en 1900. Il s'agit donc du XX[e] siècle.

2. Voir un article de M. Paul Appell qui paraîtra dans l'*Enseignement mathématique* du 15 septembre prochain (1900).

C'est, toutefois, dans un autre ordre d'idées que je crois apercevoir une solution.

Il me paraît désirable que l'accès de nos grandes Écoles devienne plus aisé, que leurs portes s'ouvrent plus largement, mais que les élèves n'y trouvent pas d'autre privilège qu'un excellent enseignement, et, par là, des facilités plus grandes pour entrer soit dans certaines carrières, soit dans les Écoles d'application, Écoles et carrières qui resteraient ouvertes à d'autres qu'eux. La sélection continuerait à se faire soit par des concours, soit, comme on l'a proposé, par des examens successifs, destinés à éliminer les moins aptes. Il ne faut pas, malgré tout, oublier que les examens et les concours ont été institués en vue de la justice, et que l'on n'a point de meilleure méthode pour consulter le hasard. Ils comportent des inconvénients nécessaires que je me suis efforcé, après bien d'autres, de montrer ici dans leur excès, mais qui ne peuvent être supprimés entièrement : on *préparera* toujours les examens ou les concours, au lieu d'étudier, pour elles-mêmes, les matières de leurs programmes. Encore vaut-il mieux que l'effort de la préparation porte sur les parties les plus élevées de la science et les plus directement utilisables. Il est bon de décourager les candidats médiocres par l'insécurité d'un premier succès, par la longueur, le nombre, la diversité des efforts qui devront le suivre, par le souci des luttes qu'ils auront encore à soutenir. Tant mieux, si l'on décourage du même coup ceux qui sont à la recherche de moyens factices, qui ne serviront plus à la réussite finale de leurs élèves.

J. TANNERY. — 14

— Ceux qui seront ainsi éliminés soit pendant leur séjour dans les Écoles, soit à la sortie, seront à plaindre ? — Pas plus, s'ils sont entrés plus tôt, que ceux qui, aujourd'hui, n'arrivent pas après quatre années «de mathématiques spéciales». Ils seront, en tout cas, moins usés, moins déprimés, moins incapables de se « retourner » d'un autre côté, d'aller chercher ailleurs le complément d'instruction qu'ils n'ont pas su acquérir dans la maison où ils avaient été admis. — Une telle mesure abaisserait le niveau des connaissances des jeunes gens qui entrent dans les Écoles ? — C'est l'élévation des connaissances à la sortie qui importe. — Elle risquerait, par la facilité des premières épreuves, de multiplier d'une façon excessive le nombre des candidats ? — La difficulté et le nombre des épreuves suivantes écarteraient ceux qui ont des raisons de se défier de leurs forces, qui peuvent bien tenter la chance, mais qui n'ignorent pas que, à continuer le jeu, ils perdront sûrement ; s'ils s'acharnent aujourd'hui, comme ils font, c'est qu'ils n'ont qu'une partie à gagner, qui est définitive. La pénible élimination de ceux qui ne doivent pas arriver au bout arrivera peut-être à se faire d'elle-même et ceux-là seuls, peut-être, qui sont sûrs de vaincre, affronteront le combat. S'il en était ainsi, les privilèges des Écoles, abolis en droit, subsisteraient en fait. Au reste, parmi ces privilèges, il en est un qu'elles ne perdront pas : c'est, pour ne pas parler de la qualité des maîtres, ce contact intime entre des jeunes gens distingués venus de tous les coins de la France, avec une éducation, des tendances diverses qui, à l'âge où l'homme s'achève, mettent en commun leurs

idées, leurs connaissances, leur travail, leur gaieté ; c'est cette conscience commune, si difficile à définir, qui naît dans chacun de ceux qui traversent la maison, et qui est l'âme de cette maison.



CHAPITRE IX

DE L'ENSEIGNEMENT DE LA GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE

Une bonne partie des travaux mathématiques du XIXe siècle se rapporte aux fondements de la géométrie. Les livres et les mémoires consacrés à ce sujet rempliraient une bibliothèque. Il me suffira de citer parmi les plus illustres de ceux qui s'en sont occupés, Gaus, les deux Bolyai, Lobatchewski, Riemann, Beltrami, Cayley, Helmholtz, Sophus Lie, MM. Klein, Hilbert, Poincaré.

Les axiomes de la géométrie ont été soumis à une longue, pénétrante et minutieuse critique, qui exigeait beaucoup de hardiesse, beaucoup de sagacité, et une connaissance approfondie de l'ensemble des mathématiques. Ce travail de critique a été fait surtout par des analystes : on sait, depuis Descartes, que les points et les figures de l'espace peuvent être remplacés par des systèmes de nombres et d'équations ; en raisonnant sur des équations tant qu'on ne fait que des transformations analytiques, on est bien sûr de ne pas introduire des hypothèses nouvelles; les hypothèses qu'on a faites, on sait exactement où on les a introduites. Au contraire, quand on raisonne sur une figure, on risque d'être ébloui par quelque fausse évidence qui n'est qu'une

habitude de nos yeux, et de laisser pénétrer dans un raisonnement quelque chose qui n'était pas dans les prémisses. La forme analytique donnée à la critique dont je parle ne permet aucun doute sur la valeur de ses résultats.

Les principes de la géométrie doivent, toutefois, être dépouillés de tout cet appareil analytique qui a permis de les éclaircir, de les distinguer, de les contrôler : il faut les placer au commencement de la science, non à la fin, les montrer dans leur nudité, sous une forme telle qu'ils puissent être saisis par un être intelligent, qui ne saurait point de mathématiques, mais auquel on demande une puissance d'abstraction et une pénétration qui ne peuvent guère s'acquérir que par une longue habitude des mathématiques. La contradiction, au point de vue de l'enseignement, est manifeste ; mais, pour le moment, laissons la pédagogie de côté, nous y viendrons plus tard.

Tout d'abord, il faut bien, au début de la géométrie, placer des définitions, et l'on sait assez qu'il est impossible, sans cercle vicieux, de tout définir. Il y aura donc des éléments, dont on parlera, et qui ne seront point définis ; tels seront, pour certains auteurs, le point, la droite, le plan : ces mots éveillent dans notre esprit des images ou des résidus d'images ; et c'est sur ces images d'où il a éliminé presque toute réalité, et sur les propriétés qu'il leur attribue, que raisonne habituellement le mathématicien. Mais cela n'est pas encore assez pur, il faut se débarrasser des images, pour garder seulement, non pas même les propriétés, mais bien les formules par lesquelles elles s'expriment : ces mots « point,

droite, plan... » ne signifieront rien en eux-mêmes ; mais il ne sera permis de les grouper, de les combiner que d'après certaines conventions définies, qui correspondent aux axiomes fondamentaux de la géométrie ; il faut et il suffit que ces conventions ne soient pas contradictoires, et qu'elles soient indépendantes les unes des autres.

« ... M. Hilbert a, pour ainsi dire, cherché à mettre les axiomes sous une forme telle qu'ils puissent être appliqués par quelqu'un qui n'en comprendrait pas le sens, parce qu'il n'aurait jamais vu ni point, ni droite, ni plan. Les raisonnements doivent pouvoir, d'après lui, se ramener à des règles purement mécaniques, et il suffit, pour faire la géométrie, d'appliquer servilement ces règles aux axiomes, sans savoir ce qu'ils veulent dire. On pourrait ainsi construire toute la géométrie, je ne dirais pas précisément sans y rien comprendre, puisqu'on saisira l'enchaînement logique des propositions, mais tout au moins sans rien y voir...[1] »

Plusieurs géomètres italiens, d'un esprit singulièrement délié, se sont placés à un point de vue analogue : il me suffira de citer, parmi eux, MM. Peano, Pieri, Padoa. Ce n'est pas seulement les figures que ceux-là excluent de leurs raisonnements, c'est les mots, ou presque : les mots de la langue usuelle éveillent en nous des restes d'images, bien décolorées sans doute, mais dont se défient encore ces abstracteurs de quintessence : devant leurs précautions contre l'infection de la réalité, celles du chirurgien qui veut assurer la parfaite asepsie de ses instruments ne

1. H. Poincaré. *Bulletin des sciences mathématiques*, 1902, p. 252.

sont rien ; ils ne veulent plus avoir affaire qu'à des signes purement conventionnels, à des lettres auxquelles on n'est plus tenté d'attribuer aucune signification ; les propriétés de ces symboles, relatives non à eux-mêmes, mais à la façon de les combiner, correspondent encore aux axiomes de la géométrie : le reste n'est plus qu'une mécanique logique ; les raisonnements prennent la forme d'équations ; quand on lit ces équations, en remplaçant ces symboles par des mots : point, droite, plan..., on a les théorèmes de géométrie. Si l'on donnait aux lettres une autre signification, une signification telle que les règles du groupement restassent les mêmes, on aurait une autre science ; de même, une formule d'algèbre peut donner, en remplaçant les lettres par diverses valeurs numériques, la solution de divers problèmes qui, à la vérité, sont tous fondus dans un même moule. C'est, comme on voit, un jeu très savant et très singulier. On n'y avance pas vite, mais les résultats sont parfaitement sûrs et s'expriment dans une langue condensée, dont les formules ont souvent l'avantage de mettre en pleine lumière l'identité de propositions qui ne semblent différentes que parce qu'elles s'appliquent à des objets divers.

Voilà à quoi aboutit ce travail de critique et d'épuration des concepts de la géométrie que les Grecs avaient déjà poussé si loin, qu'ont repris les mathématiciens du XIX[e] siècle, par des méthodes de plus en plus perfectionnées. Ces recherches subtiles, si elles ne sont pas terminées, si quelques points peuvent en être encore simplifiés et mieux éclaircis, sont au moins très avancées.

On a pu dresser une liste des axiomes sur lesquels repose la géométrie, les classer en différents groupes, s'assurer qu'ils ne comportent aucune contradiction ni interne, ni mutuelle, et qu'aucun d'eux ne peut être déduit logiquement des autres ; on a pu poursuivre les conséquences auxquelles on est conduit quand on ne suppose plus la vérité de tel ou tel axiome, et construire ainsi une suite de géométries, très différentes les unes des autres et qui, toutes, ont le même droit logique à l'existence ; aucune n'est plus vraie qu'une autre ; c'est un point que M. Poincaré, en particulier, a mis en pleine lumière par des exemples topiques. Chacune de ces géométries est cohérente ; si vous admettez ses prémisses, ses axiomes, il faut admettre ses conclusions. Si vous changez les prémisses, les conclusions changent, voilà tout.

Le lecteur, qui peut bien ignorer tout ce prodigieux travail souterrain, n'est pas sans en connaître l'origine ; elle est dans l'étude du postulatum d'Euclide, ou de cette proposition équivalente : par un point on ne peut mener qu'une parallèle à une droite. Rien ne paraît plus évident que cette proposition : elle a résisté aux efforts de tous ceux qui ont prétendu la démontrer. Un moyen tout naturel pour essayer de l'établir consiste à supposer qu'elle n'est pas vraie, à chercher des conséquences de plus en plus lointaines de cette supposition, jusqu'à ce qu'on rencontre une contradiction incontestable. On n'en rencontrera jamais : c'est ce qui est apparu d'abord par la cohérence même de ces conséquences, c'est ce qu'on a fini par mettre hors de doute. Le postulatum d'Euclide n'est ni vrai

ni faux; c'est une hypothèse dont on a besoin pour construire la géométrie ordinaire.

Cette révélation a été un scandale : si les premiers qui l'ont apportée étaient tombés entre les mains de médecins aliénistes, capables de les comprendre à moitié, ils auraient bien pu être soumis à quelque traitement pénible. Mais, les moralistes le savent, on s'habitue au scandale; le scandale du dernier siècle est maintenant une vérité courante pour les mathématiciens. Au reste, il a été renouvelé, sans qu'on s'en émût autrement. Si personne, au commencement du XIXᵉ siècle, sauf quelques précurseurs qui « de peur des béotiens et de leurs clameurs », n'osaient pas dire leur pensée tout haut, si personne ne doutait de la vérité du postulatum d'Euclide, il y a d'autres axiomes, dont on aurait encore moins osé douter, celui par exemple auquel est attribué le nom d'Archimède, qu'il conviendrait, paraît-il, de faire remonter à Eudoxe et que voici :

Considérons, d'une part, une droite indéfinie et deux points A, B sur cette droite, puis, d'autre part, une droite limitée, un mètre, par exemple : en portant cette droite limitée, ce mètre, sur la droite illimitée, à partir du point A, vers le point B, comme si on voulait mesurer la distance AB, en plaçant un second mètre au bout du premier, un troisième au bout du second, etc., et ainsi de suite, on finira par atteindre ou par dépasser le point B.

Eh bien! de cet axiome on ne peut pas non plus affirmer la vérité. C'est encore une hypothèse, dont la géométrie ordinaire, celle qu'on enseigne dans les écoles, a besoin. M. Veronese et M. Hilbert se sont amusés à construire une

géométrie où cet axiome n'est plus vrai, où il y a une région de la droite indéfinie que l'on ne peut jamais atteindre en portant bout à bout autant de mètres que l'on voudra, et cette géométrie, si différente qu'elle soit de la nôtre, ne conduit à aucune contradiction.

Et il y a bien d'autres géométries que celles dont je viens de parler : en laissant tomber un axiome ou un autre, on ouvre la fenêtre sur quelque étrange géométrie dont le mathématicien capable de se mettre à cette fenêtre sans que la tête lui tourne, voit se dérouler les fabuleuses conséquences.

J'ai entendu raconter qu'au temps de Louis XIV, à une époque où l'on ne soupçonnait pas les paysages romantiques » et où l'admiration de la nature ne sévissait pas parmi les gens qui se piquaient d'avoir du goût, un original avait eu la fantaisie d'aller se promener dans les Alpes et de grimper jusque dans un glacier : l'impression d'horreur que ressentit le pauvre homme fut si forte qu'il en mourut sur le coup. Aujourd'hui, ceux qui ont une fois contemplé la splendeur désolée des séracs et des champs de neige, rêvent d'y retourner, d'aller plus loin, de monter plus haut dans un air plus subtil, plus froid, moins respirable.

Avant de développer la conséquence qui me paraît ressortir, au point de vue pédagogique, de tout ce travail auquel ont été soumis les fondements de la géométrie, je voudrais prier le lecteur de retenir deux points.

Tout d'abord, je tiens à le répéter encore une fois, les résultats en sont parfaitement établis.

En second lieu, ce travail a été vraiment

admirable, non seulement par la difficulté surmontée, mais par son importance *scientifique et philosophique*; j'ai déjà dit qu'il était mêlé aux spéculations les plus hautes de l'analyse; il touche aussi profondément au *problème de la connaissance*, il a permis de descendre plus avant dans la pensée, d'éclairer un peu notre conception de l'espace, et par là du monde extérieur.

Il est la continuation toute naturelle de l'œuvre des Grecs; j'imagine qu'Eudoxe ou qu'Euclide, s'ils revenaient parmi nous, se reconnaîtraient parfaitement dans les conclusions de la critique moderne, qu'ils seraient satisfaits de voir que ces conclusions ont été poussées si loin, et de les savoir si assurées; peut-être en seraient-ils moins étonnés que ceux qui ont commencé de les entrevoir; sans doute ils n'ont jamais soupçonné rien de semblable à l'œuvre des géomètres du XIXe siècle; mais leur dialectique était si hardie et si pénétrante, ils étaient si habitués à suivre leur pensée jusqu'au bout, ils se jouaient si bien dans les abstractions logiques, ils avaient rencontré et résolu tant de difficultés, qu'aujourd'hui ils accueilleraient, sans doute, avec un bienveillant sourire les paradoxes qui nous ont tant épouvantés. Les philosophes croient-ils que l'auteur du *Parménide*, qui spéculait volontiers sur l'existence du non-être, se fût embarrassé pour si peu? D'ailleurs, les mathématiciens grecs n'ignoraient pas les scandales logiques, la contradiction entre nos habitudes d'esprit et les conséquences, poursuivies jusqu'au bout, d'une chaîne de déductions dont chacune est solide et solidement attachée aux autres. N'avaient-ils pas mis en pleine lumière l'existence de grandeurs

incommensurables entre elles, et ne savaient-ils pas raisonner sur ces grandeurs? Je me figure que cet Eudoxe qui a fondé une théorie de la proportionnalité, dont on admirera toujours l'élégance et la rigueur, aurait grand plaisir à converser avec M. Hilbert ou M. Poincaré et que le plaisir serait partagé.

Aussi bien, puisque le procédé littéraire est aujourd'hui bien connu, profitons-en et amusons-nous (respectueusement) à ressusciter Euclide : il ne coûte rien de lui accorder, par-dessus le marché, le don des langues modernes.

En apprenant cette extraordinaire résurrection, la Fédération internationale des Académies s'est émue; elle a proposé à tous les gouvernements des peuples civilisés de nommer l'illustre revenant inspecteur mondial, dans l'ordre des mathématiques. On ne pouvait moins faire dans un cas si rare, pour un tel savant et un tel professeur.

En passant à Leipzig, Euclide entra chez M. Teubner, qui lui remit un exemplaire des *Euclidis Opera*, édition Heiberg, en cinq volumes fort proprement reliés en peau de truie. Euclide fut émerveillé de la science de M. Heiberg, il lui promit son avis sur quelques points douteux, et un essai de restitution des ouvrages perdus.

Malheureusement, il ne donna pas une suite immédiate à ce projet; comme il prenait au sérieux ses nouvelles fonctions, il voulut s'y préparer et se mettre au courant des mathématiques modernes ; cela l'arrêta quelque temps, particulièrement les groupes de transformations et les gros volumes de Sophus Lie.

Il fit sa tournée dans les diverses écoles de

l'Europe, il se réjouit de la solidité de l'édifice qu'il avait construit, qui, mieux que le Parthénon, a bravé l'effort des siècles. Les revenants ne sont pas insensibles à la vanité ; il constata avec plaisir, ici les règlements qui imposent l'étude textuelle de ses livres, là les habitudes traditionnelles, plus fortes encore que les règlements, qui maintiennent dans l'enseignement l'esprit et les méthodes de ces livres ; mais le penseur ne tarda pas à se ressaisir ; le respect de la science l'obligea de nous blâmer : « O jeunes hommes, il est beau sans doute de respecter la vieillesse et d'honorer les ancêtres, mais vous ne savez pas garder la mesure, et vous ne m'honorez pas comme il faut ; vous ne respectez pas mon œuvre en n'acceptant pas les perfectionnements qu'elle a reçus, et qui étaient mon plus cher désir ; il n'est pas permis de s'arrêter dans la voie de la logique, il faut aller jusqu'au terme et ne pas laisser, au début de la géométrie, ces lacunes que je n'ai pas su combler et qui me choquent plus que toutes les géométries non euclidiennes, riemaniennes, non archimédiennes, cayleyennes, non pascaliennes, non arguésiennes, ou autres. Ceux qui semblent avoir détruit mon œuvre sont ceux qui l'ont vraiment continuée ; je me contente de savoir que mon postulatum, comme vous l'appelez, forme, à lui tout seul, un groupe à part dans la classification de M. Hilbert ; j'avais vu juste en signalant son importance. D'ailleurs j'avais aussi pressenti la doctrine d'après laquelle ces mots « ligne droite » ne doivent pas avoir de signification, ma définition n'en a pas beaucoup. »

Il continua, après un sourire :

« Je m'étonne grandement de l'âge et du nom-

bre des enfants qui apprennent la géométrie. Comme le goût de cette géométrie s'est développé ! je n'ose me flatter d'y avoir contribué, ou plutôt je ne croyais pas si bien réussir; sans doute, dans ma tournée, je me suis aperçu, plus d'une fois, alors que le professeur parlait, que ses élèves regardaient voler les mouches, mais enfin ceux qu'il a interrogés ont assez bien répondu, et je suis vraiment content de mon inspection. Quelle merveilleuse précocité ! Comme les enfants sont devenus sérieux et intelligents depuis le temps où je respirais pour la première fois! A leur âge je ne recherchais point les discours des hommes graves, et, plus tard, lorsque je fus devenu un maître illustre, si de pareils élèves étaient venus m'écouter, je les aurais renvoyés à leurs jeux. Je ne puis m'empêcher de plaindre un peu les vôtres, qui ne me paraissent pas tous très bien conformés. »

Il revit en pensée les beaux jeunes gens qui suivaient ses leçons ; ceux-là n'étaient point des enfants malingres ; leur grâce était vigoureuse, leurs membres étaient assouplis par les jeux et les luttes ; ils venaient exercer aussi leur esprit, et l'assouplir comme leur corps; ils avaient du temps devant eux, des loisirs dont ils pouvaient consacrer une petite partie à réfléchir, des esclaves pour les débarasser des besognes serviles.

Quand on eut expliqué à M. l'Inspecteur mondial que tous ces petits qu'il avait vus, apprenaient la géométrie parce qu'ils en avaient besoin pour gagner leur vie et faire quelque métier, il ouvrit de grands yeux, les ferma et reprit sa rêverie, dans laquelle il s'abîma profondément : que de changements étaient survenus parmi les

hommes, depuis le temps où le clair soleil de l'Hellade, les nobles lignes de l'horizon de son pays, le « rire infini des mers », les temples lumineux, les statues de marbre, les longues théories de jeunes vierges, les jeux athlétiques, les récits merveilleux des poètes, les beaux discours de l'Agora, les lentes conversations avec les philosophes enchantaient ses yeux et son esprit, alors que l'on ne soupçonnait ni l'industrie, ni les usines, ni les chemins de fer, ni les tramways, ni la houille noire, ni la houille blanche, ni le transport de la force à distance.

« Les mathématiques, dit Descartes, au commencement du *Discours de la méthode*, ont des inventions très subtiles, et qui peuvent beaucoup servir, tant à contenter les curieux qu'à faciliter tous les arts et diminuer le travail des hommes. » Pour ce qui est de faciliter les arts, cela est bien certain ; la diminution du travail des hommes me paraît plus douteuse, et c'est le contraire que nous voyons. La première partie de la phrase, si souvent citée, du grand géomètre, m'a toujours rappelé le « jeu de l'oie renouvelé des Grecs, fort propre à passer le temps lorsqu'on n'a que faire », et je crois bien que c'est cette conception des mathématiques qui prévaut dans l'enseignement : contenter les curieux.

Notre enseignement est volontiers un enseignement de luxe ; on s'excuse de ce luxe en parlant de la formation des esprits, à laquelle il faut tout sacrifier, et l'on décore d'une belle épithète, en les qualifiant de désintéressés, les enseignements dont l'inutilité crève les yeux. Débarrassons-nous d'abord de ces fadaises.

Le désintéressement est une belle chose. Ce n'est pas ici le lieu de parler de l'intérêt qu'ont quelques personnes à la conservation de quelques enseignements qu'elles disent désintéressés ; cela ne saurait toucher aucun des lecteurs de la Revue, mais, vraiment, en quoi manque-t-on de désintéressement quand on s'efforce d'être utile aux autres ? Avoir honte de l'utilité, quelle sottise ! Ce qui est utile, c'est ce qui répond aux besoins de l'homme, ce qui permet de les satisfaire ; l'utilité d'un enseignement est en quelque sorte la mesure de son *humanité*. Ce n'est pas la peine, je pense, de dire ici qu'il y a des besoins de diverses sortes, et que l'enseignement des sciences n'a pas la prétention de suffire à tous ; mais je voudrais bien qu'on en finit avec ce reproche d' « utilitarisme » qu'on adresse aux gens qui pensent que, dans l'enseignement, il faut tenir compte des besoins de ceux à qui on s'adresse.

Quant à la formation des esprits, dont il est sûr qu'il faut se préoccuper, dans l'enseignement primaire comme ailleurs, je demande en quoi l'inutilité y sert. Croit-on que les enfants ne pressentent pas souvent cette inutilité, et que le vague pressentiment les excite à l'effort ? N'est-il pas, au contraire, la vraie raison de l'ennui qui les gagne, de ce dégoût du travail intellectuel que l'on rencontre si fréquemment à l'école ou au lycée ? Contenter les curieux, c'est fort bien : il faudrait d'abord éveiller la curiosité. Croit-on que les enfants de treize ou quatorze ans aient un goût naturel pour les abstractions logiques, pour les raisonnements à vide, pour les démonstrations qui leur paraissent beaucoup moins claires que

les énoncés ? Sans doute il faut les habituer à bien raisonner, mais à raisonner sur des réalités, ou tout au moins sur des modèles ou des images qui se rapprochent de la réalité, qui sont des simplifications de ce qu'ils voient ou de ce qu'ils touchent ; il faut leur faire pressentir ces facilités que, selon Descartes, la géométrie apporte à tous les arts. Comment faire ce dessin ? Comment mesurer ce champ ?

En même temps qu'il explique comment un triangle est déterminé par la base et les deux angles à la base, Clairaut, dans ses *Éléments de géométrie*, montre comment on peut trouver la distance d'un point inaccessible, en construisant, sur le terrain, un triangle égal à un triangle dont la distance cherchée est un des côtés. Il n'emploie pour cela que des instruments grossiers, faciles à imaginer et à construire. Voilà une petite énigme résolue, qui fixera dans l'esprit de l'élève un des cas d'égalité des triangles. Plus tard le même exemple permettra à Clairaut d'illustrer le cas correspondant dans la théorie de la similitude. C'est là, à ce que je crois, l'ordre d'idées où l'on doit se mouvoir avec les débutants.

C'est sur des choses qu'ils auront à raisonner : il faut les habituer à regarder les choses, à en éliminer tel ou tel caractère qui n'intéresse pas le géomètre, à les simplifier, à en reconnaître les traits essentiels, à les voir dans leur aspect géométrique, à les reproduire par le dessin, à préciser leur connaissance par la mesure. Loin de leur apprendre à se défier de l'intuition, il faut développer cette intuition, leur montrer qu'ils la possèdent, leur donner peu à peu confiance en eux-mêmes. Il faut, avant tout, les intéresser : l'ennui,

la dépression qui en résulte, voilà le véritable ennemi ; que l'effort qu'on demande aux enfants porte, dès qu'il est possible, sa récompense avec lui. J'en aurais long à dire sur ce sujet, sur la race de bourgeois ennuyés qui sortent de nos lycées, sur les sots qui en sont arrivés à regarder l'ennui comme une marque de distinction. Quant à ceux qui n'auront pas le moyen d'acquérir cette distinction-là, il est bien inutile de leur faire goûter, à l'école, cet ennui qu'ils n'auront pas le temps de cultiver dans le reste de leur vie.

Maintenant qu'on sait à peu près ce que doit être un enseignement vraiment logique des commencements de la géométrie, personne n'oserait le réclamer. Voici comment s'exprime M. Poincaré sur cette préoccupation d'une parfaite rigueur logique, débarrassée de toute intuition, dont j'ai parlé plus haut : « ... Il est inutile de faire observer combien elle serait funeste dans l'enseignement et nuisible au développement des esprits ; combien elle serait desséchante pour les chercheurs, dont elle tarirait promptement l'originalité... » M. Hilbert compte une vingtaine d'axiomes, répartis en cinq groupes : j'en cite quelques-uns afin qu'on voie bien toute la divergence qu'il y a entre le but qu'il poursuit et le but de l'enseignement élémentaire.

« Si A, B, C, sont des points d'une droite et si B est entre A et C, B est entre C et A.

« Si A et C sont deux points d'une droite, il y a au moins un point B qui est entre A et C et au moins un point D tel que C soit entre A et D.

« De trois points qui sont sur une droite, il y en a toujours un, et un seul, qui est situé entre les autres. »

Je m'arrête. Qui soutiendra qu'il faut commencer l'enseignement de la géométrie, à des enfants, par des propositions de ce genre?

Mais ce n'est pas tout; il s'agit d'enseigner la géométrie entière en étant bien sûr de ne s'appuyer que sur les vingt axiomes, et sans jamais faire appel à l'intuition. Qui en sera capable? Quelques-uns des membres de la section de géométrie de l'Institut, non sans se donner beaucoup de peine. Je ne crois pas m'avancer beaucoup en disant qu'aucun d'eux n'aurait la prétention d'être suivi par beaucoup d'autres de ses confrères, auxquels il demanderait de temps en temps s'il ne s'est point trompé.

A quoi bon insister sur l'impossibilité d'un enseignement auquel personne ne songe? Cela était indispensable parce qu'il est vrai qu'on ne doit pas, qu'on ne peut pas s'arrêter dans la voie de la logique, et que si l'on veut former de purs logiciens, il faut aller jusqu'au bout de la méthode euclidienne.

Personne ne voudrait l'essayer, et il serait bien injuste d'accuser d'une pareille folie les partisans de la parfaite rigueur. La critique des axiomes, dit très justement M. Veronese, n'est pas le fait des commençants, mais bien de ceux qui sont en possession de la science. On abandonnera donc la réduction des postulats au moindre nombre possible, et, du même coup, l'étude de la dépendance ou de l'indépendance de ces postulats; mais au moins veut-on les énumérer tous, sous leur forme abstraite, et ne s'appuyer que sur eux.

M. Veronese, qui a publié sur la géométrie des travaux dont l'importance scientifique est consi-

dérable [1], a fait dans ce sens un essai très intéressant avec la collaboration d'un maître éprouvé, M. Gazzainga [2]. Le savant professeur de l'université de Padoue est de ceux qui veulent que les concepts géométriques soient des concepts « logiquement indéterminés » ; la façon dont on raisonne sur ces concepts est déterminée par une série de postulats. Mais, pour lui, les raisonnements abstraits doivent être continuellement éclairés par l'intuition. Le livre de MM. Veronese et Gazzainga est fort remarquable par sa profondeur, sa brièveté et le souci de la clarté ; je suis convaincu qu'il peut rendre les meilleurs services à des jeunes gens déjà formés, désireux d'associer, d'ordonner, de préciser leurs connaissances : au reste les *Elementi di geometria* servent de textes dans plusieurs lycées italiens, et les résultats, paraît-il, sont excellents : il convient de remarquer qu'en Italie la méthode euclidienne est à peu près imposée officiellement ; je l'ai déjà dit plus d'une fois, on ne se montre vraiment partisans de cette méthode qu'en acceptant les perfectionnements dont elle est susceptible.

Il est certain aussi qu'un livre comme celui de MM. Veronese et Gazzainga ne s'adresse pas à de véritables commençants, aux élèves de nos écoles primaires supérieures ou du premier cycle de nos lycées. Pour ces élèves, c'est une étude instructive des formes géométriques qui seule est

1. En particulier les *Fondamenti di Geometria a piu dimensioni e a più specie di nuita rettilinea esposti in formo elementare o lezioni par la scuola di magistero in matematica*. Veronese, Fratelli Drucker.

2. *Elementi di geometrica ad uso dei Gimnasie Licei*. Veronese, Fratelli Drucker : la première édition est de 1900.

possible et je suis convaincu que les auteurs en conviendraient volontiers. Ils commencent par des considérations abstraites sur les ensembles, sur la correspondance entre deux ensembles. Voici maintenant une définition que je prends à la page 10 : « L'expression « le segment rectiligne *a* est égal au segment rectiligne *b* » signifie qu'on peut établir entre les points de *a* et de *b* une correspondance univoque et du même ordre et que toute proposition qui se peut énoncer du segment *a* ou de l'une de ses parties, considérés l'un et l'autre séparément, se peut répéter pour le segment *b* ou pour la partie correspondante, et inversement. » Sans que je m'arrête sur cette définition, il est trop clair que ce n'est pas à ce point de vue qu'on peut se placer avec des enfants.

Les esprits qui sont capables d'atteindre à ce degré d'abstraction sont d'une rare qualité intellectuelle, et j'admire la race à laquelle ils appartiennent. Est-ce cette puissance d'abstraction que nous voulons développer et ne serons-nous pas contents de nos fils s'ils *voient* juste et s'ils *raisonnent* juste sur ce qu'ils voient?

En France, dans nos meilleurs traités de géométrie élémentaire, on ne se préoccupe pas de pousser aussi loin la logique formelle : on glisse quelque peu sur les définitions ou les axiomes, et l'on ne craint pas, par exemple, de faire appel aux notions de corps solides, de mouvement, de coïncidence pour définir l'égalité de deux figures. Je sais bien qu'on le fait parfois d'une façon un peu honteuse, quand on ne sait comment s'en passer et quelques-uns vont jusqu'à ne plus se rappeler la façon dont ils ont établi les cas d'éga-

lité des triangles; tel un excellent mathématicien qui s'est oublié jusqu'à dire à M. Méray qu' « il n'admettait pas le mouvement en géométrie ». Depuis ce temps, déjà fort éloigné, le « mouvement » a pénétré dans notre enseignement et les propriétés les plus essentielles du mouvement de translation, du mouvement de rotation, du mouvement hélicoïdal figurent, depuis une douzaine d'années, dans les programmes officiels de nos lycées. Cette heureuse introduction, si je ne me trompe, est due à l'influence de M. Darboux; elle n'a scandalisé personne. Au lieu de traiter de ces idées dans des leçons à part, mal reliées au reste, les maîtres ont assurément le droit d'en tirer tout le parti possible et d'en vivifier tout leur enseignement. Pour ce qui est des fondements de la géométrie, il ne manque pas non plus, dans notre pays, ni ailleurs, d'esprits de premier ordre pour rappeler l'importance, pour ces fondements mêmes, des notions de corps solides et de mouvement, et la place qu'elles tiennent, par exemple, dans les théories de Sophus Lie.

Tous nos auteurs aussi font plus ou moins appel à l'intuition spatiale. Ce n'est qu'une question de mesure. On réduit plus ou moins, on avoue plus ou moins cette part de l'intuition. On l'avouait moins jadis, parce que cet appel était regardé comme une imperfection, un défaut qu'il fallait dissimuler en attendant qu'on pût le corriger. Il est permis aujourd'hui de prendre conscience de ce qu'on fait, de dire tout haut qu'on ne prétend pas exposer d'une façon logique les premiers éléments de la géométrie, précisément parce que l'on sait ce qu'est cette exposition logique et qu'elle ne regarde que les savants.

A procéder ainsi, on ne risquera pas de fausser les intelligences. Rien ne vaut, pour la déformation des intelligences, les démonstrations mal comprises et l'apparence de la fausse rigueur, où l'élève se sent empêtré, non éclairé. Présenter comme rigoureuse une démonstration qui ne l'est pas parfaitement est, de la part du maître, une mauvaise action. Si l'élève est un imbécile (j'admets pour un instant qu'il y en ait de tels), il croit comprendre : s'il est vraiment intelligent, il reste perplexe, n'arrive pas à formuler son doute, et se débat inutilement dans l'obscurité ; il perd confiance en lui. Donner de l'assurance aux sots, de la timidité à ceux qui ne le sont point, voilà ce qu'il faut éviter.

J'ai suffisamment insisté, pour n'y plus revenir, sur l'ennui et le dégoût que ne peuvent manquer de ressentir les enfants devant la recherche d'une rigueur absolue.

Qu'on ait donc le courage de prendre son parti et de *montrer* les choses aux enfants, et qu'on les débarrasse de ces raisonnements qui, je le répète, leur semblent beaucoup plus obscurs que les énoncés. Au moins dans un premier enseignement on peut, à ce que je crois, aller très loin dans cette voie, habituer d'abord les élèves à la géométrie, leur faire voir beaucoup de résultats qu'ils trouvent évidents, commencer de les habituer aux raisonnements géométriques en leur faisant démêler, dans quelques figures, des propriétés intéressantes qu'ils n'avaient pas vues tout d'abord, les mener jusqu'à quelques-uns de ces énoncés où l'intuition et les raisonnements un peu imprécis dont on s'est contenté jusqu'alors ne suffisent plus, leur tendre au besoin quelques-uns de ces

petits pièges où l'intuition les trompe, si bien que l'erreur où ils sont tombés les étonne, les inquiète en les amusant et qu'ils sentent la nécessité de revenir en arrière, de serrer davantage les raisonnements, d'acquérir un terrain solide, un trésor de vérités bien sûres.

Peu importe encore que ce trésor-là soit parfaitement rangé ; ne nous attardons point à l'inventorier curieusement, ni à rechercher l'origine de ce qui le constitue, ni à en retirer tout ce qui n'est pas indispensable ; que l'enfant sache bien s'en servir et que, désormais, il s'interdise de puiser ailleurs. Un jour, peut-être, il aura l'orgueil de vouloir l'alléger et de se suffire avec des ressources moindres. Il sera temps alors de lui donner satisfaction.

Quelques-uns, paraît-il, craignent que de cette façon les mathématiques ne deviennent par trop faciles : pour eux, la difficulté est une vertu propre ; qu'ils se rassurent : il reste, en dehors des éléments, assez de choses difficiles. Si les commencements sont trop faciles, les élèves iront plus loin ; ce n'est pas le chemin à faire qui leur manquera. Je ne m'arrêterais pas à cette singulière objection, si elle ne se trouvait pas contenir une part de vérité.

C'est que, en effet, les mathématiques ont une véritable importance sociale, qui ne tient ni à leur valeur propre, ni à ces facilités qu'elles apportent aux arts, ni au secours extraordinaire qu'en tirent les autres sciences, mais bien au rôle qu'elles jouent aux examens. J'ai parlé plus haut de l'utilité des sciences, de leur adaptation aux besoins intellectuels et physiques de l'homme. Cette utilité-là n'est pas la vraie, au moins celle

qui est immédiate : les sciences sont utiles en ce qu'on les demande aux examens. Lorsqu'on rédige le programme de l'examen ou du concours que l'on met à l'entrée de quelque carrière, on pense bien aux connaissances qui sont utiles dans cette carrière et on les fait, d'ordinaire, figurer dans ce programme. Mais ni les élèves, ni les maîtres, pour la plupart, ni les examinateurs ne regardent au delà de l'examen lui-même ; ce n'est point les difficultés des choses qui importent, c'est les difficultés de l'examen. Il faut bien que l'examen soit difficile pour permettre aux examinateurs de choisir parmi les candidats.

Il est bon que notre orthographe soit compliquée pour qu'on puisse les refuser sur leur dictée.

C'est d'ailleurs une duperie que de ne mettre dans le programme que des choses élémentaires, parce qu'alors on raffine sur les éléments.

Arrivent des théoriciens, des psychologues, qui mettent leur talent, non à remédier au mal, mais à le justifier ; il s'agit de choisir les candidats intelligents ; peu importe ce qu'ils savent, pourvu qu'ils sachent des choses difficiles, et qu'ils aient manifesté leur intelligence par la façon dont ils se jouent des difficultés. Je ne crains pas de le dire, mieux vaudrait élever et surcharger les programmes que de laisser se produire ces bouffissures dont souffrent tous nos enseignements, et que la préparation aux examens développe d'année en année. Quand crèveront-elles ? Ce n'est pas les réponses à débiter aux examens qu'il faut enseigner, c'est les choses elles-mêmes ; puissent-elles devenir si simples et si claires que tous nos enfants les saisissent sans peine, s'y intéressent, sachent en tirer parti, aillent plus loin,

acquièrent de nouvelles armes pour les luttes du travail, qu'ils deviennent capables d'appliquer dans l'industrie et dans l'agriculture les méthodes scientifiques, parce qu'ils les comprennent et qu'ils ont foi en elles ! puissent quelques-uns contribuer plus tard au développement et au renouvellement de ces méthodes ! puissent ceux qui les appliqueront, qui les perfectionneront, qui les créeront accroître la vraie richesse de notre pays !

Je demande maintenant la permission de m'arrêter sur un livre qui peut, à ce que je crois, aider beaucoup les maîtres qui s'efforcent de faciliter, pour leurs élèves, les commencements de la géométrie.

Voici bientôt trente ans qu'ont paru les *Nouveaux éléments de géométrie* de M. Méray. C'est un livre révolutionnaire, qui n'a point fait de bruit. M. Laisant s'en est indigné récemment dans l'*Enseignement mathématique* et a parlé d'une conspiration du silence. Je ne crois pas qu'il y ait eu de conspiration du silence. Il était conforme à la destinée de M. Méray que les choses se passassent ainsi ; et cette destinée aurait été moins parfaite, les futurs historiens des mathématiques seraient privés d'un vif plaisir, s'il était arrivé une seule fois que l'importance d'une des idées de M. Méray fut reconnue de suite. On peut espérer que tout se terminera bien, et que M. Méray, pendant de longues années, jouira de la justice qu'on finit par lui rendre.

Notez que ce n'est point sa faute si cette justice est tardive. M. Méray ne garde point ses idées pour lui, il n'est point indifférent à leur

sort ; il les publie, il les enseigne, il cherche à les répandre, il y croit, il s'en fait l'apôtre ; il les soutient avec une ardeur, une ténacité, une verve admirable. Pour ce qui est de sa géométrie, il a réussi à convaincre quelques personnes autour de lui, à instituer quelques expériences qui ont parfaitement réussi, et dont le succès a été raconté ici même, dans un article extrêmement intéressant, par un de ceux qui les ont dirigées [1].

Ces expériences ont réussi pour deux raisons : la qualité du livre de M. Méray n'est pas la seule. Il faut tenir compte des hommes auxquels M. Méray a su communiquer sa flamme ; ils y ont apporté un enthousiasme sans scepticisme, qu'un peu de persécution a rendu plus ardent ; il est beau de souffrir pour la cause de la vérité ; il y a de la joie à lutter contre « la routine officielle », à servir le progrès, et cette joie de la lutte prépare la joie du triomphe. Peut-être ces expériences auraient-elles moins bien tourné si elles avaient été imposées officiellement à des gens qui croyaient savoir la géométrie, obligés de la rapprendre, sous une autre forme, avec des raisonnements et des mots nouveaux dont M. Méray n'est pas avare. Aussi bien, faut-il souhaiter que ces expériences soient continuées librement, par des maîtres que leurs confrères auront convertis, qui se sentiront une part d'initiative et qui voudront réussir comme eux. Je crois qu'on pourrait les concilier avec les programmes, en entendant ceux-ci d'une façon un peu large. C'est un point sur lequel je reviendrai tout à l'heure. Mais je

1. Voir *Revue pédagogique*, 1902, 2e sem., p. 43.

m'imagine que M. Méray est de ces libres esprits qui aiment la liberté même chez les autres, et qu'il serait désolé qu'on imposât aux gens sa façon de penser.

Son idée fondamentale est de substituer aux axiomes logiques les propriétés les plus simples du mouvement d'un corps solide, celles auxquelles nous sommes le plus habitués. C'est par là qu'il commence ; dès les premières pages, il s'agit du mouvement (rectiligne) de translation d'un corps solide. Ce mouvement est connu de tous ; c'est le mouvement du tiroir que l'on attire à soi, ou que l'on repousse, de la caisse du wagon sur une voie ferrée bien droite, de l'équerre qui glisse le long d'une règle. Par un point de l'espace et le point coïncidant du corps solide passent une droite fixe et une droite entraînée avec le corps solide qui glissent l'une sur l'autre, et que l'auteur appelle la glissière fixe et la glissière mobile. Un plan qui fait partie du corps solide et qui passe par une glissière mobile glisse sur un plan fixe de l'espace : on peut d'ailleurs faire mouvoir un corps de manière que telle droite de l'espace que l'on veut serve de glissière fixe, et qu'un point de la figure pris sur la glissière mobile correspondante vienne occuper telle position que l'on voudra sur la glissière fixe. M. Méray admet encore que deux translations successives reviennent à une translation unique.

J'entends bien les réclamations : M. Méray admet tout ; il supprime les démonstrations ; de même, d'après Pascal, les Jésuites supprimaient le péché en supprimant la défense. De cette façon, la géométrie et la morale sont simplifiées.

Qu'est-ce que c'est, par exemple, que le dernier axiome cité ? Pourquoi ne pas admetre aussi les propositions analogues : deux rotations consécutives, autour de deux droites qui passent par un même point, peuvent être remplacées par une rotation unique autour d'un autre axe; deux mouvements hélicoïdaux peuvent être remplacés par un seul?

Tout cela est fort bien ; mais je le demande à mon tour : est-il facile de faire voir à un enfant chacune des propriétés qu'admet M. Méray? En doutera-t-il dès qu'il aura compris le sens des termes? est-il aisé d'imaginer et de réaliser de petits modèles variés qui illustrent tous ces énoncés, et le maniement de l'équerre n'y suffit-il pas à peu près? Toutes ces remarques intéresseront-elles plus l'enfant que la démonstration classique sur la possibilité d'élever (dans un plan) une perpendiculaire à une droite, par un point, et sur l'impossibilité d'en élever deux? Je crois que personne n'hésitera, à répondre et cela me suffit. Ne me dites pas que ce n'est point là de la science, ou je transcris tout au long les vingt axiomes de M. Hilbert. Pour ma part, loin de reprocher à M. Méray d'omettre tout ce qu'il admet, je lui reprocherais plutôt, si, au lieu d'un essai d'exposition rationnelle de la géométrie, il avait voulu surtout faire un livre pour les commençants, d'être encore trop systématique et de n'avoir pas admis quelques propositions qui, comme le parallélisme des glissières, se déduisent à la vérité bien aisément de ses axiomes du mouvement, lorsqu'on adopte sa définition du parallélisme : deux droites sont parallèles quand on peut amener l'une sur l'autre par une transla-

tion. Il est vrai que, à ce moment, l'auteur n'a pas défini la distance d'un point à une droite, ni même la perpendiculaire à une droite, mais, quitte à me boucher les oreilles pour ne pas entendre les hurlements, et à dire, comme Clairant, qu'une perpendiculaire *ne penche ni d'un côté ni de l'autre*, je ne verrais pas d'inconvénient à affirmer que deux parallèles restent partout à la même distance; ou, après leur avoir expliqué en gros ce que c'est qu'un angle, à conseiller aux enfants de regarder un peu le mouvement de leur équerre, et à en conclure que les « angles correspondants », dans la figure qu'on sait, sont égaux. Au moins n'y verrais-je pas d'inconvénient dans les premières leçons, et je ne veux pas dire que toutes ces notions ne doivent pas être reprises, réduites et systématisées quelque peu; mais il faut, à mon avis, faire désirer aux enfants cette réduction et cette systématisation, la leur promettre comme une récompense, au lieu de les dégoûter de la science, comme on fait, par des abstractions qu'ils ne sont pas encore capables de supporter. Je reconnais aussi avoir brouillé sans scrupules des notions que M. Méray, qui est avant tout un esprit ordonné, a soigneusement séparées.

C'est, en effet, après l'étude du parallélisme qu'il introduit la notion d'angle, essentiellement liée pour lui au mouvement de rotation. C'est aussi ce mouvement qui lui permet de définir la perpendicularité des droites et des plans, et cela, sans doute, scandalise moins les enfants que les gens âgés qui se rappellent les longues années passées à étudier la géométrie plane, et leur ahurissement devant les figures de l'espace, leur

incapacité, pendant quelque temps, à y rien voir. Pour ma part, j'ai gardé ce souvenir-là très nettement; mon cerveau s'était probablement, par la force de l'habitude, réduit à deux dimensions, et j'eus d'abord autant de peine à raisonner sur l'espace qu'il m'en faut aujourd'hui pour raisonner sur la quatrième dimension.

M. Méray admet donc que, une droite étant donnée, on peut, par un quelconque de ses points, mener un plan qui forme avec la droite un assemblage solide, tel que, en le faisant tourner autour de la droite le plan glisse sur lui-même. Il n'est pas difficile de fabriquer un petit modèle qui habitue les enfants à se rendre compte de ce mouvement. S'ils ont envie de jouer un peu avec le grand *toton* qu'on leur montrera, où est le mal ? Et puis, n'ont-ils jamais regardé une porte s'ouvrir et le bas de la porte décrire le plancher? Il est bien aisé de rapprocher les deux mouvements. La figure formée par un plan et une droite perpendiculaires peut coïncider avec elle-même par retournement. Toutes les figures formées de cette façon sont égales. De même que, par chaque point d'une droite, on peut lui mener un plan perpendiculaire, par chaque point d'un plan on peut lui mener une droite perpendiculaire. Avec ces notions et l'étude faite antérieurement des droites et des plans parallèles, l'étude des relations où interviennent à la fois le parallélisme et la perpendicularité se fait d'une façon extrêmement simple.

Au mouvement de rotation, M. Méray ne rattache pas immédiatement, comme il est clair qu'on pourrait le faire, la notion de la trajectoire des différents point, ou, si l'on veut, du cercle.

L'étude du cercle concerne la géométrie plane proprement dite dont il repousse l'étude aussi loin qu'il peut.

Sur ce point auquel il tient beaucoup, sur cette fusion de la géométrie dans l'espace et de la géométrie plane que vantent plusieurs excellents géomètres italiens, j'avoue que je ne suis pas convaincu. — Encore une fois, je vois très bien l'avantage qu'il y a à commencer par quelques leçons de géométrie dans l'espace; en fait, avec les figures de l'espace, on est plus près de la réalité qu'avec les figures de la géométrie plane; d'un autre côté, l'intérêt qu'il y a à familiariser les enfants avec ces formes géométriques, avec des termes que le maître pourra employer ailleurs en ayant la certitude d'être compris, est bien évident. Pour le dessin, en particulier, l'avantage est clair. C'est un point sur lequel M. Chancenotte a insisté dans les intéressants rapports qu'il a eu l'occasion de faire sur les résultats des expériences dont j'ai parlé plus haut : les programmes de l'enseignement du dessin sont, paraît-il, d'un an en avance sur les programmes de l'enseignement théorique. Il est évidemment mauvais de faire copier aux enfants des dessins dont ils ne se rendent pas compte, et ce genre d'exercice peut être regardé comme parfaitement propre à engendrer l'ennui, qui est le fléau de notre système d'enseignement. Qu'il me soit permis de dire en passant que je vois, dans cette nécessité même de renforcer l'enseignement du dessin, ou plutôt de lui donner une base rationnelle, le moyen d'appliquer les méthodes de M. Méray, en respectant suffisamment les programmes. Ce n'est pas ici le lieu d'examiner les horaires; mais je crois bien

qu'il est possible de s'en arranger sans les bouleverser de fond en comble, pourvu que l'administration veuille s'y prêter, et que les directeurs d'écoles y apportent un peu de cette bonne volonté dont MM. Chancenotte, Billiet, Mironneau, Mounot ont donné l'exemple avec tant de vaillance. J'ajoute encore que les nécessités propres de l'enseignement primaire, les concours d'entrée aux écoles d'arts et métiers en particulier, et l'importance que le dessin ne peut manquer d'y prendre, conduisent peut-être à pousser de suite l'étude de la géométrie dans l'espace plus loin que, pour ma part, je ne le voudrais. On voit bien que je ne demande pas mieux que de faire aux doctrines radicales de M. Méray toutes les concessions possibles.

Je n'en crois pas moins à la convenance de séparer la géométrie plane de la géométrie dans l'espace et de s'arrêter longtemps sur la première, après avoir donné aux élèves des vues sur les formes et les mouvements les plus simples. Cette séparation est vraiment naturelle ; c'est sur le plan que se réalisent les dessins, et une étude approfondie des figures planes, pour elles-mêmes, me paraît s'imposer. Là aussi, il me semblerait désirable de faire précéder toute exposition dogmatique d'une excursion rapide, un peu aventureuse, dans le domaine qu'on va explorer, et d'en prendre une première connaissance. C'est jusqu'ici, dans le mode d'exposition que j'imagine, aux formes et au dessin qu'on s'est attaché ; déjà, de cette façon, un bon nombre de propositions essentielles ont pu être acquises et groupées, tant bien que mal. D'autres propositions se rapportent à la *mesure*, et il importe d'en

donner l'idée aux élèves. Ici les maîtres pourraient prendre pour guide les *Éléments de géométrie* de Clairaut, épouvantail des rigoristes, que je soupçonne de corrompre les éditeurs, afin qu'ils ne fassent point réimprimer ce livre dangereux.

Clairaut a été l'un des plus grands mathématiciens du XVIII[e] siècle. Ses travaux en astronomie restent fondamentaux. Il aurait été aussi excellent maître d'école qu'il a été profond mathématicien, et ses *Éléments de géométrie* sont admirables. Le sens qu'il a de ce que les enfants peuvent comprendre ou deviner, et surtout de ce qui peut les intéresser est merveilleux. Son style, sa façon d'expliquer les choses ont peut-être un peu trop vieilli pour qu'on mette son livre entre les mains des enfants, d'autant qu'il ne correspond à aucun programme; mais je suis convaincu qu'il intéresserait vivement les maîtres, qui en tireraient le meilleur parti [1].

Il faut bien arriver à une étude rationnelle et vraiment scientifique de la géométrie.

L'exposition des principes sur lesquels elle repose sera certainement facilitée par les vues antérieurement acquises, mais je reconnais volontiers qu'on aura toujours quelque peine à doser convenablement la part de l'intuition, à limiter cet ensemble de propositions qu'on regardera comme intuitives, que les élèves devront posséder parfaitement, et sur lesquelles ils savent qu'ils pourront s'appuyer en toute sécurité ; à

1 L'édition que j'ai sous les yeux, et qui a été faite par M. Saigey (Hachette, 1852) est du format in-12 ; elle contient 128 pages.

partir de là, sauf sur un point dont je parlerai tout à l'heure, la pleine rigueur, la logique, reprendront leurs droits et l'on ne s'en écartera plus. A la vérité, M. Méray n'entend nullement sacrifier cette rigueur dans les premières leçons de géométrie dans l'espace ; il admet d'autres axiomes que ceux qui figurent dans la plupart des traités, des axiomes plus riches, d'où il est facile de tirer plus de faits géométriques, mais ces axiomes une fois énoncés et compris, il en déduit logiquement les conséquences, et l'enchaînement de ces conséquences est parfaitement rigide. J'estime, pour ma part, que, en débutant, cet enchaînement pourrait être plus lâche, et la part de l'intuition plus large.

« On me reprochera peut-être, dit Clairaut, en quelques endroits de ses *Éléments*, de m'en rapporter trop aux témoignages des yeux et de ne m'attacher pas assez à l'exactitude rigoureuse des démonstrations. Je prie ceux qui pourraient me faire un pareil reproche, d'observer que je ne passe légèrement que sur des propositions dont la vérité se découvre, pour peu qu'on y fasse attention. J'en use de la sorte, surtout dans les commencements où il se rencontre plus souvent des propositions de ce genre, parce que j'ai remarqué que ceux qui avaient de la disposition pour la géométrie se plaisaient à exercer un peu leur esprit, et qu'au contraire ils se rebuttaient, lorsqu'on les accablait de démonstrations pour ainsi dire inutiles. »

Je partage entièrement ces vues de Clairaut; il me sera sans doute permis d'ajouter que je sais tout le prix de la rigueur, et que, assurément, plus vite on y habitue les enfants, mieux cela vaut.

M. Méray me paraît estimer qu'on peut y arriver très tôt ; c'est là un point sur lequel les expériences qui ont été instituées me semblent extrêmement intéressantes ; aussi est-il désirable qu'elles soient continuées, multipliées, critiquées. Tant mieux si sur ce point, comme sur d'autres, les faits donnent raison à M. Méray. Je me contenterais pour ma part, si l'on s'attachait pleinement à la rigueur dans l'enseignement de la géométrie plane, après cette première excursion dont j'ai parlé tout à l'heure et quelques leçons destinées à fixer l'ensemble des propositions sur lesquelles on s'appuiera exclusivement.

Pour cet enseignement d'ailleurs, le livre de M. Méray restera encore extrêmement utile, on y verra les simplifications qu'apporte l'emploi du mouvement de translation et du mouvement de rotation ; par là les démonstrations deviennent plus claires, plus faciles, plus vivantes ; ceux des élèves à qui leurs aptitudes permettront de pousser les études un peu loin se prépareront ainsi à l'emploi de ces méthodes de transformation dont les mouvements ne sont, après tout, que des cas particulièrement simples, et qui constituent le fond véritable de la géométrie et de presque toutes les mathématiques.

Le casse-tête chinois est un joli jeu, auquel les enfants sages s'appliquent volontiers ; encore ne faut-il pas qu'ils s'y absorbent trop. La vieille géométrie, avec son abus de triangles égaux ou semblables, qu'il fallait s'exercer à découvrir ou à introduire dans toutes les figures, ressemble singulièrement à ce jeu. Qu'on s'y exerce un peu, rien de mieux ; mais il faut aller plus vite et plus loin. M. Méray a peut-être été le premier à

introduire en géométrie les termes de la trigonométrie. L'usage du sinus, du cosinus, ou de la tangente, permet de simplifier bon nombre de démonstrations, et d'éviter cette perpétuelle recherche de triangles semblables qui arrive à être si fastidieuse et si artificielle.

La peur des mots et des barrières qu'on a mises entre les diverses parties de la science est vraiment bien extraordinaire. Faire de la trigonométrie dans la géométrie, quelle horreur ! Quoique les programmes officiels de l'enseignement primaire supérieur aient, depuis une dizaine d'années, donné raison à M. Méray sur ce point, cela semble encore une abomination à beaucoup d'honnêtes gens : qu'il faut être mal élevé pour écrire un sinus à la place d'un rapport !

C'est pure sottise ; mais il convient peut-être, à ce propos, de dire un mot de ceux qui se fâchent quand on introduit quelque calcul en géométrie. Il y a là un purisme respectable sans doute, mais qui est excessif dans un enseignement qui prétend surtout être utile. D'ailleurs, quand il s'agit de géométrie métrique, on ne peut guère le pousser jusqu'au bout; on n'évite point les additions, ni les multiplications, ni les divisions. Pourquoi évitera-t-on avec soin les combinaisons de ces opérations, et l'emploi de quelques formules simples d'algèbre ? On a reproché cet emploi à Legendre, qui n'en a guère abusé, mais qui pourtant aurait, dit-on, contribué ainsi à gâter Euclide. Tout en admirant, comme il convient, la recherche esthétique dans une exposition et l'ingéniosité de ceux qui aiment à se passer de ce qui est commode, je crois que dans l'enseignement élémentaire on doit

beaucoup sacrifier à la facilité, et ne pas craindre un bout de calcul dans une démonstration ou une recherche géométrique, si elle est ainsi rendue plus aisée, ou plus facile à retenir, et je ne vois pas de mal à ce que des enseignements, qu'il faut bien mener de front, se pénètrent et s'éclairent mutuellement.

Il me reste à dire un mot de la mesure des aires et des volumes. En géométrie plane, si l'on ne soulève pas les difficultés que comporte la notion d'équivalence, les choses vont toutes seules. Il n'y a pas plus d'effort à faire, en géométrie dans l'espace, pour arriver à la mesure du prisme droit. Pour les propositions fondamentales relatives au rectangle et au parallélépipède rectangle, il me semble, comme à Clairaut, que le mieux est de s'en tenir au bon vieux raisonnement qui sert dans toutes les écoles à montrer qu'il y a cent décimètres carrés dans un mètre carré, et mille décimètres cubes dans un mètre cube : ce raisonnement là est simple et naturel; celui où interviennent des produits de rapports est artificiel et comporte des difficultés sur lesquelles on me permettra de ne pas insister. A partir du prisme droit, c'est épouvantable.

Sans doute les raisonnements qui permettent de passer du prisme droit au prisme oblique, puis d'établir le volume de la pyramide sont extrêmement ingénieux ; il convient de les garder dans un musée historique, afin de montrer combien nos ancêtres étaient intelligents ; leur place n'est pas dans l'enseignement élémentaire.

L'un des mathématiciens les plus profonds de notre temps m'a raconté dernièrement qu'il avait employé une bonne partie de la nuit qui pré-

cédait le jour où il devait subir les examens de l'École Normale supérieure, à repasser tous ces raisonnements, à fixer dans sa mémoire leur ordre et leur enchaînement. Heureusement (pour l'École Normale), cette nuit blanche ne l'a pas empêché d'être reçu, mais qu'il aurait mieux fait de dormir ! Assurément des théories qui se fixent si mal dans l'esprit d'un homme, doué de facultés mathématiques aussi rares que celui dont je cite ici les souvenirs, doivent être écartées.

Je connais deux moyens de les remplacer : ils sont d'ailleurs très vieux, et je n'ai pas du tout la prétention de les avoir inventés. L'un est médiocre, l'autre est excellent, mais demande un effort notable, moindre à mon avis que les leçons qu'on fait aujourd'hui sur ce sujet.

Le moyen médiocre consiste à appliquer ce théorème : Quand deux corps solides sont toujours coupés par un plan mobile, parallèle à un plan fixe, suivant deux courbes (ou deux polygones) qui enferment des aires équivalentes, les portions des deux corps solides comprises entre deux plans parallèles sont équivalentes. Dès lors, on voit de suite que deux prismes, l'un droit, l'autre oblique, qui ont des bases égales (ou équivalentes) et des hauteurs égales sont équivalents, que deux pyramides qui ont des bases équivalentes et des hauteurs égales sont équivalentes. Ce théorème ne s'applique pas pour simplifier l'établissement du volume de la sphère. Quant au théorème lui-même, on n'en donnera pas de démonstration rigoureuse, mais on en fera sentir la vérité, après avoir établi la mesure du prisme droit et

du cylindre droit, en pratiquant, dans les deux corps, au moyen des plans parallèles, des coupes minces, plus minces que des feuilles de papier. Chacune des petites rondelles que l'on obtient ainsi diffère aussi peu que l'on veut d'un cylindre droit très plat; chacune est à peu près équivalente à la rondelle correspondante, et l'on se trompe aussi peu que l'on veut en disant que la somme des rondelles qui forment le premier corps est équivalente à la somme des rondelles qui constituent le second : on ne se trompe pas du tout. N'importe quel maître, avec un petit modèle formé de rondelles de papier qu'il aura fabriqué lui-même, rendra cela clair comme le jour pour ses élèves.

Le second procédé, celui qui est excellent, mais qui demande un effort notable, consiste à apprendre d'abord le calcul intégral, avant d'étudier la mesure des volumes dont je parle. — Le calcul intégral! Y pensez-vous? A l'École primaire! A l'École primaire supérieure ou à l'École normale, oui; je ne ris pas du tout, je suis le plus sérieux du monde. L'effort qu'il faut pour apprendre ce que c'est qu'une dérivée, qu'une fonction primitive, et comment l'on s'y prend, à l'aide de ces admirables outils, pour évaluer une surface et un volume, est certainement moindre que l'effort qu'on demande à un enfant pour apprendre à établir la mesure du prisme oblique après celle du prisme droit, l'équivalence de deux pyramides (vous savez bien, la figure à escaliers, qui est si ennuyeuse à faire), — puis les insupportables volumes tournants. Aujourd'hui encore, je ne sais pas l'expression du volume engendré par un segment de

cercle qui tourne autour d'un diamètre. J'ignore pourquoi cette expression-là n'a jamais voulu m'entrer dans la tête.

Eh bien! Pour enseigner ce qu'il faut de calcul différentiel et intégral, et de géométrie analytique, par-dessus le marché, huit ou dix leçons, en allant bien lentement, sont peut-être nécessaires. Qu'on ne me dise pas qu'elles ne seront pas comprises. Pourquoi donc les élèves comprennent-ils les leçons sur les volumes que j'énumérais tout à l'heure ? Ces leçons faites, il faut juste un quart d'heure pour établir les expressions de tous les volumes de la géométrie élémentaire. Et que l'on pense au monde d'idées qui s'ouvrirait devant l'élève, à la foule d'applications qui lui deviennent alors possibles !

Que faisons-nous du prodigieux travail des trois derniers siècles, du génie des savants qui les ont illustrés, des trésors qu'ils ont amassés pour nous ? Nous ressemblons à un millionnaire qui a sous sa main les appareils les plus perfectionnés de l'éclairage électrique, et qui voudrait, malgré la mauvaise odeur, se servir, pour y voir clair, et sous prétexte que la forme en est charmante, d'une de ces lampes en bronze vert-de-grisé que l'on déterre de temps en temps dans le sol de la Grèce ou de l'Italie. Continuons de recueillir ces lampes, admirons-les, et mettons-les dans une vitrine.



CHAPITRE X

L'ARITHMÉTIQUE

1. — Sur l'enseignement de l'arithmétique à l'école.

D'excellents esprits se préoccupent de la façon routinière et mécanique dont l'arithmétique serait enseignée à l'école primaire ; la méthode suivie, dit-on, ne vise nullement à développer la faculté de raisonnement des enfants. « Tandis que les autres études, celles de l'histoire, de la morale, du français, par exemple, en dehors des connaissances spéciales dont elles meublent la mémoire, concourent puissamment à former l'esprit, le calcul, tel qu'il est enseigné, ne favorise nullement le développement intellectuel du jeune écolier. » Ailleurs, on se plaint de l'insuffisance des soi-disant raisonnements qui accompagnent, d'habitude, les solutions des problèmes, raisonnements d'où la raison est bannie, et qui sont, le plus souvent, reproduits d'après quelque modèle.

Ces préoccupations sont excellentes ; leur source est dans le désir de voir cultiver à l'école les facultés supérieures de l'enfant, dans le souci du progrès, dans la haine de cette paresse intellectuelle où la fatigue du métier peut faire tomber le meilleur maître, s'il ne veille pas incessamment sur lui. Malgré le profond respect que

j'ai pour l'origine de ces préoccupations, je n'ai pu m'empêcher de les trouver excessives et, puisqu'il est dangereux de vouloir trop bien faire, puisqu'on risque de se décourager en voulant viser trop haut, je demande la permission de m'en expliquer ici; il va de soi que je n'apporte pas des observations personnelles, mais des réflexions, sur un sujet auquel j'ai beaucoup pensé. Le lecteur qui connaît mieux que moi les choses de l'enseignement primaire, sera juge de la mesure dans laquelle ces réflexions s'appliquent à la réalité des faits.

L'instituteur, cela est entendu, doit saisir toutes les occasions qui s'offrent à lui de développer la moralité de ses élèves, leur intelligence et leur jugement; lorsqu'il peut éclairer pleinement ce qu'il enseigne, en donner toutes les raisons, qu'il le fasse; c'est pour le mieux. Mais faut-il qu'il interdise à ses élèves de *croire* à ce qu'il leur dit, lorsqu'il ne leur apporte pas une démonstration complète, une de ces démonstrations qui font que la chose enseignée appartient désormais à l'élève qui l'a comprise, tout autant qu'au maître qui l'a enseignée? S'il en était ainsi, que deviendrait l'enseignement de l'histoire, du français et de la morale? Faudra-t-il, pour qu'on n'accuse pas l'enseignement d'être dogmatique, expliquer aux enfants ce qu'est la critique des textes, ou la philologie, et discuter les fondements de la morale? Personne n'y pense, et si toutes ces explications et toutes ces discussions étaient possibles, ne resterait-il plus dans l'enseignement de l'histoire du français et de la morale, aucune de ces vérités auxquelles l'enfant est obligé de croire parce qu'elles lui sont affirmées par un

homme en qui il a confiance? Et pourquoi donc le maître ne solliciterait-il pas la confiance de ses élèves, quand il leur apprend l'arithmétique et qu'il a le droit de leur dire, en toute sincérité : « Si vous travaillez bien, plus tard, en vous donnant un peu de peine, vous pourrez reconnaître par vous-mêmes la vérité de ce que je vous affirme ? » Que l'élève sache distinguer entre l'affirmation à laquelle il croit, et la démonstration qu'il comprend : c'est en cela que consiste l'esprit critique; il ne consiste pas à rejeter toutes les affirmations. Reconnaître la sincérité de celui qui parle, et qui dit toujours la vérité, se fier à celui qui sait, ne juger par soi-même que ce que l'on connaît et ce que l'on comprend par soi-même, s'avouer que l'on ignore beaucoup, ce n'est là, pour les hommes faits ou les écoliers, ni une cause d'erreur, ni la marque d'un défaut d'intelligence.

D'autre part, il y a dans tous les enseignements une partie mécanique et routinière qu'il faut accepter avec modestie. Rien n'est plus élevé que le rôle de l'instituteur; encore faut-il qu'il sache descendre des hauteurs de ce rôle et qu'il ne prétende pas former *l'esprit et le cœur* de ses élèves quand il leur apprend la table de multiplication. Je veux bien qu'il en tire une leçon de morale, et sais qu'il y a des choses ennuyeuses qui sont fort utiles; mais cette leçon même, il ne la répétera pas toutes les fois qu'il demandera à ses élèves combien de fois font sept fois huit, ou sept fois six : de même, dans tout métier, il y a des gestes qu'il faut apprendre à faire automatiquement, et qu'il faut répéter des milliers de fois avant de les bien faire; que l'on

soutienne l'enfant ou l'apprenti, par l'espoir d'un temps où la répétition de l'effort aura supprimé la difficulté, j'en suis d'avis; mais qu'on se garde bien de lui inspirer du mépris pour ce qu'il entre de *machinal* dans cette répétition. Il faut que le geste soit machinal.

L'enseignement de l'arithmétique, dit-on, semble n'avoir plus d'autre objet que de mettre l'écolier en état d'appliquer un certain nombre de règles *qu'il ne comprend pas*. Il ne faudrait pas s'exagérer l'importance de la justification théorique de certaines règles ou opérations : je m'imagine que tout le monde reconnaît l'impossibilité de justifier à l'école, par un raisonnement rigoureux, la règle de la division des nombres entiers, mais que, tout en reconnaissant cette impossibilité, quelques personnes s'en affligent. Je voudrais qu'elles s'en consolassent entièrement. Si c'est là ces règles que l'écolier ne comprend pas, il n'y a pas lieu de s'en émouvoir, à mon avis. Sans doute, celui chez qui la curiosité scientifique s'est éveillée, désire se rendre compte, au moins une fois, des règles ou des procédés qu'il applique; encore ne pense-t-il pas à la théorie qui justifie ces procédés lorsqu'il les applique : il ne doit pas y penser; il doit mettre toute son attention dans l'application correcte des règles qu'il sait être vraies, et plus cette application est *machinale*, plus elle est sûre. Le mathématicien même emploie des outils qu'il n'a pas vérifiés et dont il ignore parfois comment ils ont été fabriqués. Malgré toute sa critique, c'est un homme qui se résigne à avoir confiance en d'autres hommes : la table de logarithmes qui est sur sa table, il n'en a sûrement pas vérifié tous les nombres. Sait-il

seulement comment on s'y est pris pour la construire? Pas toujours, au moins dans le détail. Et pour d'autres tables numériques dont il se sert à l'occasion, il ne s'est même jamais posé la question. Est-il un seul mathématicien qui ne se soit jamais servi d'un théorème ou d'une formule qu'il serait incapable d'établir au moment où il l'utilise? Quel est l'ingénieur, même sorti de l'École polytechnique, qui n'a pas recours, à l'occasion, à un aide-mémoire, voire un barème? Pourquoi ne pas permettre aux enfants d'accorder à leurs maîtres cette confiance que le mathématicien de profession apporte volontiers à d'autres mathématiciens qui ont calculé des tables numériques ou dressé des recueils de formules? Pourquoi ne croiraient-ils pas ce maître quand il leur dit que c'est ainsi qu'on s'y prend pour faire une multiplication ou une division?

Ce que les enfants ont besoin de *comprendre*, c'est le sens de l'opération, c'est ce qu'elle permet d'obtenir. Je m'imagine qu'on leur apprend cela à l'école, et, peut-être, mieux qu'on ne fait au lycée. Je ne crois pas trop m'avancer en disant qu'il y a plus d'un bachelier ès sciences qui a étudié l'algèbre et la trigonométrie, pour qui la division est une opération dans laquelle on met le dividende à gauche, le diviseur à droite, à l'intérieur d'un angle droit, dans laquelle on sépare,... etc. : c'est la description de l'opération, non sa définition, non ses propriétés, qui subsiste dans son esprit. Voilà ce qu'il faut éviter, à l'école comme au lycée.

Comment arrive-t-on à faire comprendre aux écoliers le sens de chacune des quatre règles? Je crois bien que, là-dessus, la plupart des institu-

teurs m'en remontreraient. C'est au fond la définition de l'opération qu'il s'agit d'éclairer : ils ne commencent pas à dicter à leurs élèves une belle phrase abstraite, qui ferait ouvrir de grands yeux à tous ceux qui ne sont pas résignés à apprendre sans comprendre ; non, ils commencent par des exemples concrets, avec des nombres très simples : j'ai sept billes dans ma poche gauche, combien y a-t-il de billes dans cette poche gauche ? Des douze billes qui sont maintenant dans ma poche gauche, j'en prends cinq que je mets dans ma poche droite ; combien en reste-t-il dans ma poche gauche ? Et si je remets ces cinq billes dans cette poche gauche, combien contiendra-t-elle de billes ? Voici quatre petits tas dont chacun comprend cinq billes ; je mets toutes les billes en tas, combien y en aura-t-il dans ce tas ? J'ai dix-neuf billes que je veux partager entre cinq enfants ; chacun reçoit trois billes et il m'en reste quatre. Chaque opération reçoit son nom. Les exemples sont repris, multipliés, diversifiés. Les nombres sont assez simples pour que les calculs puissent se faire de tête, ou même sur des objets réels ; on demande aux enfants, pour une foule de petits problèmes, non seulement d'arriver au résultat, mais de reconnaître chacune des opérations qu'ils ont faites, de la nommer ; on passe à des cas un peu plus compliqués, où il faut faire deux, trois de ces opérations ; là encore, il ne suffit pas que les enfants trouvent le résultat exact, ils doivent analyser le calcul qu'ils ont fait : d'abord une addition, puis une soustraction, etc.. Sans doute, tous ceux sous les yeux desquels cette page est tombée se disent : « oui, c'est ainsi que l'on fait, à peu près, avec ces exemples, ou avec d'autres... »

Et comment ferait-on autrement? Il suffit d'y penser, et d'avoir eu des enfants à qui l'on a appris à compter.

Eh bien ! tout cela n'est nullement mécanique. Reconnaître les cas où il faut faire cette opération, et non cette autre, sentir ce qu'il y a de commun dans les cas où on fait la même opération, c'est faire acte d'intelligence, de la même intelligence qui nous sert à grouper des individus, ou des mots, ou des faits, dans une même famille, sous une même loi. Et l'enfant est capable de ces actes intellectuels, parce qu'ils se rapportent à des objets qu'il peut voir, toucher ou imaginer, et que l'effort d'attention qu'ils exigent est court.

Fixer l'attention sur de longs raisonnements abstraits, où les conclusions se développent l'une après l'autre, n'appartient qu'à des esprits formés, où les aptitudes logiques se sont développées.

Au bout d'un certain temps, quand il juge que le moment est venu, que les écoliers ont vu et reconnu assez de faits pour comprendre un énoncé général, l'instituteur définit chacune des règles : je crois bien que l'écolier, qui comprend cette définition abstraite, y trouvera quelque joie, et qu'il se donnera volontiers la peine d'en fixer les termes dans sa mémoire. Devant des questions toutes pareilles à ces questions qu'il sait résoudre, mais où les données sont un peu plus compliquées, les nombres un peu plus grands, l'enfant sent qu'il lui manque quelque chose : cela est trop long pour qu'il s'en tire; il n'en finirait pas de compter sur ses doigts, ou avec des boules. Comment faire? Il est tout découragé. Le maître lui dira : « Je vais vous apprendre un moyen

d'aller plus vite » ; il enseignera le mécanisme de la règle. Je ne suis nullement scandalisé à l'idée que l'enfant ne se rendra pas compte du pourquoi de ce mécanisme, et la confiance qu'il accordera à son maître ne me déplaît en aucune façon. Sans doute, il est bon que l'ouvrier connaisse son outil ; exigera-t-on, pour cette raison, qu'il ne se serve que d'outils qu'il est capable de fabriquer lui-même, ou seulement même qu'il peut démonter et remonter ? Il doit savoir ce qu'il peut faire de son outil, les cas où il doit le prendre, ceux où il en faut un autre ; il doit être très habitué à s'en servir. De même en arithmétique, deux points importent : reconnaître quelles opérations on doit faire, c'est-à-dire, au fond, bien comprendre les définitions, puis savoir faire correctement ces opérations : le premier point est affaire d'intelligence, le second de routine, ou, pour parler mieux, d'habitude. Il ne faut pas mépriser cette routine-là ; le résultat est un profit très clair qu'on emporte de l'école ; que de fatigues, d'agacements, que de temps elle épargnera à l'homme fait, à l'ouvrier, au contremaître, à l'ingénieur ou au savant !

Et dans la partie même de l'enseignement du calcul qui s'adresse vraiment à l'intelligence, il faut faire sa part à l'habitude. N'est-ce point en vertu de l'habitude que nous reconnaissons si vite les choses qui nous sont familières, que nous les nommons de suite, que nous n'hésitons pas sur le parti que nous pouvons en tirer ? N'est-on pas allé jusqu'à soutenir que l'évidence même n'était qu'une longue habitude qui s'accumule dans la race, et dont les individus profitent ?

Cette explication raisonnée des opérations fon-

damentales, à laquelle on attache tant de prix, j'admettrais fort bien qu'on la laissât de côté, même pour des enfants qui reçoivent quelque éducation théorique. Il est beaucoup plus important de savoir les propriétés des opérations que d'être en mesure de justifier la façon dont on les effectue, et quelques-unes de ces propriétés peuvent être enseignées et même démontrées à l'école : est-il difficile, par exemple, de faire comprendre à des écoliers, sur des exemples concrets, que pour multiplier un nombre par une somme, on peut multiplier ce nombre par les éléments de la somme et ajouter ensuite les produits partiels. Les propositions de ce genre, dont les unes peuvent être démontrées complètement, dont les autres seront simplement énoncées et vérifiées, sont beaucoup plus précieuses que ce qu'on appelle la « théorie de la multiplication, ou de la division »; les problèmes où l'on pourra les utiliser ne manquent pas; elles contribuent à la vraie intelligence des définitions, dont elles sont les conséquences logiques. C'est elles, d'ailleurs, qui mènent plus loin, qui servent, par exemple, à l'intelligence de l'algèbre, dont on peut pousser l'étude aussi loin qu'on veut, sans avoir jamais besoin de la « théorie de la division ».

J'arrive aux problèmes, et je n'entends parler ici que de problèmes très simples, que peuvent faire ceux des écoliers qui ont vraiment compris les définitions. Je vois qu'on se plaint des *raisonnements* qui, dans les rédactions des élèves, accompagnent les solutions, et l'on a cité des exemples, fort bien choisis : je demanderai la permission de m'arrêter sur l'un d'eux parce que, aussi bien, le sujet est fort intéressant, que les

cas concrets sont les plus instructifs, et qu'il serait bon de s'entendre sur ce qu'on doit demander aux enfants, en fait de raisonnements.

Pour ma part, je me contenterais fort bien d'un raisonnement très court, qui prouve suffisamment au maître que l'élève a compris les définitions, la signification des règles, et qu'il les applique à propos. Voici l'exemple dont je veux parler; je commence par le copier tout au long; c'est, paraît-il, un type que l'on rencontre très souvent.

Un pré rectangulaire de 100 mètres de long sur 45 mètres de large a produit 240 kilogrammes de foin par are. On demande quelle est la valeur de la récolte de ce pré, sachant que le foin vaut 7 fr. 50 le quintal ?

Surface du pré : 160 m. × 45 m. = 7.200 mètres carrés ou 72 ares.

La production en foin est de 240 kgr. × 72 = 17.280 kilogrammes ou 172 quintaux 8.

La valeur de la récolte est de 7 fr. 50 × 172,8 = 1.296 fr.

Eh bien ! Je ne trouve pas cela si mal; si l'élève qui a fait ce devoir n'a pas copié cette solution sur un problème identique, avec d'autres nombres, je suis disposé à croire qu'il a compris la question et les règles qu'il a appliquées, qu'il sait en outre se débrouiller dans le système métrique.

La solution est parfaitement intelligible pour le maître qui doit la contrôler, les calculs sont indiqués dans l'ordre où ils doivent être effectués et il n'y a pas de bavardage inutile. A part quelques mauvaises habitudes dans les notations, qui ne sont pas bien graves et sur lesquelles je reviendrai, je ne vois rien à reprendre à ce devoir, sauf un point dont je vais d'abord parler.

La solution est présentée sous forme synthé-

tique; c'est, une fois le problème résolu, la forme la plus courte et la plus commode, et l'on peut soutenir qu'elle suffit, puisque l'élève, pour résoudre son problème, a dû, d'une façon plus ou moins consciente, faire l'analyse des inconnues et des données. Il est désirable que cette analyse soit très consciente, et je trouverais bon que le maître en exigeât la trace, sinon dans tous les devoirs, au moins dans quelques-uns; même dans la question très simple dont je viens de copier l'énoncé et la solution, il ne serait pas mauvais que cette analyse fut indiquée par une phrase telle que celle-ci : on cherche le prix de la récolte, connaissant le prix du quintal de foin; il suffit donc de connaître le poids de la récolte; or, on connaît le poids de la récolte produite par un are; il suffit donc, pour avoir le poids de la récolte totale, d'avoir la surface du champ.

Cette analyse doit être faite oralement, à peu près pour tous les problèmes que l'on traite au tableau, afin que l'élève s'habitue à distinguer les inconnues des données, à reconnaître comment il peut déduire les inconnues des données, à ne pas mêler celles-ci au hasard dans l'espoir que la solution en sortira toute seule, mais bien à regarder le but, à déterminer les étapes successives qu'il faut parcourir pour l'atteindre, à ne travailler que dans la bonne direction.

Plus le maître aura habitué ses élèves à la méthode analytique, plus il sera assuré qu'ils la pratiquent, moins il se montrera exigeant dans la rédaction de la solution : au fond, c'est de ceux qui n'ont pas trouvé cette solution qu'il faudrait exiger une rédaction où la marche analytique fût exposée en détail.

Quoi qu'il en soit, acceptons la rédaction synthétique, et reprenons la solution citée plus haut pour voir ce qui lui manque.

Il manque l'énoncé des règles qui sont d'ailleurs appliquées correctement.

Surface du pré : 160 m. × 45 m. = 7.200 mètres carrés ou 72 ares.

Cette courte phrase implique les explications suivantes : lorsque les dimensions d'un rectangle sont exprimées en mètres, on obtient la surface de ce rectangle, exprimée en mètres carrés, en multipliant les nombres qui mesurent ces dimensions. Donc, la surface du pré sera, en mètres carrés, 160 × 45 = 7.200 ou 72 ares, parce qu'un are vaut 100 mètres carrés, en sorte que c'est le chiffre des centaines qui, dans l'expression de la surface en mètres carrés, devient le chiffre des unités lorsqu'on exprime cette surface en ares. On exprime cette surface en ares parce que la production moyenne du champ, pour un are, est donnée.

Continuons.

La production en foin est de 240 kgr. × 72 = 17.280 kilogrammes.

Cette courte phrase vaut bien celle-ci, qu'on rencontre souvent : 1 are produit 240 kilogrammes; 72 ares produiront 72 fois plus ou 240 × 72 : Les « ...fois plus » ou « ...fois moins » sont des expressions qui n'éveillent guère d'autres idées que celles de multiplication ou de division, et ne constituent le plus souvent qu'un semblant de raisonnement. Le vrai raisonnement consiste dans le rappel de la définition de la multiplica-

tion qui, lorsque le multiplicateur est entier, n'est qu'une addition abrégée : la production de foin, exprimée en kilogrammes, est la somme de ce que produiraient 72 champs d'un are, ou la somme de 72 nombres égaux à 240, ou le produit de 240 par 72. On peut aussi s'appuyer sur une règle plus générale, qui s'applique lors même que le multiplicateur n'est pas entier : le poids total de foin s'obtient en multipliant par le nombre qui exprime la surface du champ le nombre qui exprime le poids de foin produit par l'unité de surface; j'aurai l'occasion de revenir tout à l'heure sur une règle analogue.

240 kgr. × 72 = 17.280 kilogrammes ou 172 quintaux.

Il y a là un changement d'unité analogue à celui qui a déjà été fait; le quintal vaut 100 kilogrammes; pour déduire le nombre qui exprime le poids en quintaux du nombre qui exprime le poids en kilogrammes, on regarde, dans ce dernier nombre, le chiffre qui exprimait des centaines, comme exprimant des unités.

La valeur de la récolte est : 7 fr. 50 × 172,8 = 1.296 francs.

Voici la règle appliquée : la valeur d'une certaine quantité de marchandise s'obtient en multipliant le prix de l'unité de marchandise par le nombre qui mesure cette quantité de marchandise, avec l'unité choisie. Cette règle, si l'on se rapporte à la définition de la multiplication, est évidente quand le multiplicateur est un nombre entier; ce n'est pas le cas ici, c'est à la multiplication des fractions que l'on a affaire. Si le maître s'adresse à des élèves un peu avancés, à qui il a expliqué

l'opération en général, la règle précédente, pour obtenir le prix d'une marchandise, est une des meilleures illustrations que l'on puisse donner de cette multiplication des fractions. S'il s'adresse à des commençants, qu'il veut habituer à effectuer des multiplications sur des nombres décimaux, avant de leur avoir parlé des fractions ordinaires, la chose ne va pas sans difficultés; car, on est obligé de l'avouer, il ne peut guère que décrire l'opération, sans la définir, au moins quand le multiplicateur n'est pas un nombre entier, puisque, alors, la définition est tout aussi difficile, qu'il s'agisse de fractions décimales ou de fractions ordinaires : il se bornera donc à des affirmations comme celle-ci : « En faisant la multiplication des nombres décimaux, suivant le procédé que je vous ai décrit, la règle pour obtenir le prix d'une certaine quantité de marchandise est la même, soit que cette quantité s'exprime par un nombre entier, soit qu'elle s'exprime par un nombre décimal, et c'est précisément en vue de la généralité de cette règle ou d'autres règles analogues, qu'on a inventé cette manière de faire la multiplication. » Il peut d'ailleurs faire sentir à ses élèves cette généralité sur des exemples simples; il dirait ici : « Le prix d'un poids de 10 kilogrammes est de 0 fr. 75; le prix de 1.728 poids de 10 kilogrammes est donc 0 fr. 75 $\times$ 1.728, puisque les chiffres sont les mêmes dans les deux facteurs, et que le nombre de chiffres décimaux est aussi le même. »

Voilà, sur l'exemple cité, les principales explications qu'on pourrait donner. J'ai fini, malgré moi, par les mettre dans la bouche du maître. Personne, à coup sûr, ne demandera à l'élève

une aussi longue rédaction ; ces explications ont leur place dans l'interrogation ; une fois de temps en temps, le maître pourra demander qu'on mette par écrit l'énoncé de chacune des règles qui ont été appliquées, sous une forme aussi brève que possible. S'il le faisait souvent, les élèves se contenteraient de copier ou de reproduire servilement ces énoncés, ils feraient un travail d'écriture qui les dégoûterait d'autant plus qu'ils en sentiraient l'inutilité. La sensation de l'effort inutile doit être toujours soigneusement évitée ; elle est funeste.

Notez bien que si l'on voulait pousser les choses à l'extrême, ce n'est pas seulement l'énoncé des règles qu'il faudrait exiger des élèves, mais, aussi bien, leur démonstration : et pourquoi pas l'explication des propositions sur lesquelles repose cette démonstration ? Chaque problème deviendrait un cahier, plusieurs cahiers, la répétition de leçons de cette année et de l'année dernière.

A mon avis, la rédaction doit être courte : l'enfant lui-même, quand il a terminé ses calculs, sent le besoin de les mettre au net, de les mettre en ordre, dans un ordre tel qu'il puisse se reconnaître et que le maître puisse contrôler son travail ; il ne faut pas lui demander, dans sa rédaction, de se substituer à ce dernier, et de rédiger toute une leçon.

Sur l'exemple dont j'ai parlé déjà si longuement, il est encore possible d'ajouter quelques observations intéressantes.

Pour expliquer les changements d'unité qu'on avait à faire (are au lieu du mètre carré, quintal au lieu du kilogramme) je me suis appuyé sur la

signification des chiffres d'un nombre écrit dans le système décimal; au lieu de cela, on peut appliquer la règle générale pour le changement des unités : cette règle est la véritable clef de la définition de la multiplication et de la division des fractions; j'ai écarté ce mode de raisonnement comme trop abstrait; je ne suis pas sûr qu'il soit au-dessus de la portée de bons élèves, près de passer leur certificat d'études primaires.

Enfin, au lieu de changer d'unités dans le courant du problème, on peut conserver tout le temps les mêmes unités, le mètre carré, le kilogramme, le franc. La solution, en conservant la même suite d'idées, se présente alors ainsi :

Dimensions du pré rectangulaire, en mètres	160×45
Surface du pré en mètres carrés.	$160 \times 45 = 7.200$
Production moyenne de foin, en kilogrammes, par are. .	240
Production moyenne de foin, en kilogrammes, par mètre carré.	2,4
Production totale de foin, en kilogrammes	$2{,}4 \times 7.200 = 17.280$
Prix du quintal de foin, en francs	7,50
Prix du kilogramme.	0,075
Valeur de la récolte, en francs.	$0{,}075 \times 17.280 = 1.296$

J'arrive aux notations dont je ne dirai qu'un mot.

Quand on fait des calculs, on ne les fait jamais que sur des nombres abstraits; au moins, pendant qu'on les fait, on ne pense pas à la signification concrète des nombres sur lesquels on opère : aussi me paraît-il préférable de ne pas

employer dans le langage des expressions comme celle-ci : « La surface du pré s'obtient en multipliant 160 mètres par 45 mètres », de ne pas écrire 160 m. × 45 m., mais bien 160 × 45; multiplier par 45 mètres, cela n'a pas de sens. Bien entendu, la nature des unités, tant pour les données que pour les résultats, doit être rigoureusement spécifiée; elle doit l'être, même pour les résultats intermédiaires qui ont une signification concrète; cette signification fournit un contrôle utile, et il est bon, à chaque pas, de savoir ce qu'on fait. Relativement à la façon dont il convient de désigner ces unités, je crois qu'on ferait bien d'adopter le procédé qui est presqu'universellement suivi à l'étranger et de placer, avant le nombre, le nom de l'unité ou l'abréviation qui remplace ce nom, d'écrire par exemple fr. 17,50; m. 17,50; mq. 17,50 pour signifier 17 francs 50 centimes, 17 mètres 50 centimètres, 17 mètres carrés 50 décimètres carrés; il est vraiment peu commode, surtout quand on a affaire à des nombres décimaux, d'intercaler le nom de l'unité après le chiffre de l'unité, avant les chiffres décimaux, et il est choquant d'écrire 172 quintaux 8. Toutefois, d'une part, il y a des habitudes invétérées contre lesquelles il est difficile de lutter, d'autre part même des écritures comme 160 m. × 45 m., qui sont évidemment incorrectes, peuvent être acceptées si le signe m placé à la suite des nombres 160 et 45 n'est pas regardé comme qualifiant ces nombres, mais seulement comme destiné à rappeler leur origine. J'ai cru utile d'appeler l'attention sur ces détails d'écriture, mais je n'insisterai pas davantage.

J'ai réservé pour la fin une objection qui s'est

sans doute présentée à l'esprit du lecteur judicieux, et sur laquelle je veux d'autant plus m'arrêter qu'elle contient une bonne part de vérité.

Il aura sans doute paru à plus d'un lecteur que, même dans la solution des problèmes, au lieu de diminuer la part de la routine, j'invite en quelque sorte à l'augmenter encore, en réduisant les raisonnements à l'énoncé de quelques règles : l'écolier saura ces règles par cœur et les appliquera machinalement ; elles s'interposeront entre les choses et lui, elles l'empêcheront de regarder les choses elles-mêmes, de voir chaque cas particulier dans sa réalité concrète, et la signification vraie de chaque calcul intermédiaire ; c'est cette vision claire de chaque cas particulier et la parfaite intelligence de tous ses détails qu'il faut donner aux écoliers, c'est l'effort nécessaire pour y parvenir qu'il faut exiger d'eux parce que cet effort vaut par lui-même, et que, seul, il développe l'intelligence en l'exerçant.

Cet effort, à mon avis, il faut le demander aux enfants, quand on leur explique chacune des règles qu'on leur apprend, avant l'énoncé même de la règle qu'on essaiera de leur faire trouver sur des cas simples, puis, après l'énoncé de nombreuses applications. S'il s'agit, par exemple, de la règle relative au prix d'une marchandise, on variera les données, le nom de la marchandise, l'unité choisie, le prix de cette unité ; pendant longtemps on restera dans des cas faciles, comportant des objets que l'enfant connaît bien, on n'opèrera que sur des nombres simples, afin qu'il puisse imaginer nettement ces objets et leur réunion ; il trouvera sûrement la règle de

lui-même dans le cas où il veut savoir le prix d'un nombre entier d'objets identiques, connaissant le prix de chacun de ces objets. Si l'on veut lui expliquer la règle dans ce cas général, on lui fera traiter une multitude de cas particuliers où le nombre qui mesure la marchandise est une fraction à termes très simples, comme 1/3, 2/3, 4/3..., afin qu'il puisse imaginer l'unité de marchandise divisée en trois parties égales, puis une, deux, quatre... de ces parties; on l'amènera à reconnaître qu'il doit faire une multiplication par une fraction; on arrivera peu à peu à lui donner l'intelligence complète de la règle. Lorsqu'il est devenu familier avec cette règle, qu'il l'applique couramment, on aura à s'assurer bien des fois que l'habitude même qu'il en a, si même elle est devenue instinctive, peut redevenir à volonté intelligente et consciente.

D'autres règles analogues à celle-là, où les raisonnements sont de la même nature, celle, par exemple, qui permet d'obtenir la production totale d'un champ connaissant la surface de ce champ et la production (moyenne) par unité de surface, celle qui donne le poids d'une matière homogène, connaissant son volume et sa densité, celle qui donne le chemin parcouru, connaissant la vitesse et le temps, etc., seront rapprochées les unes des autres, de manière à bien faire comprendre aux enfants comment s'applique la multiplication. C'est quand il y sera parvenu qu'il comprendra vraiment la *définition* de la multiplication : cette définition ne lui apparaîtra plus vide; elle lui apparaîtra pleine de tous les cas particuliers. Il est à peine utile de dire qu'il comprendra en même temps comment, dans cha-

cune des règles signalées plus haut, trois nombres entrent en jeu, que l'un est le produit des deux autres, et que si l'on connaît deux de ces trois nombres, on peut calculer le troisième.

Dans un problème où il y a une suite de règles à appliquer, c'est précisément la détermination de ces règles, l'ordre dans lequel il faut les appliquer pour faire sortir les inconnues des données qui constitue le travail intelligent, c'est à cela que doit s'appliquer l'enfant, c'est ce travail (et l'exactitude des calculs) que doit contrôler le maître; ce n'est plus sur l'intelligence de chaque règle particulière qu'il faut insister, ce n'est plus sur ces règles particulières qu'il faut porter l'effort.

Ce que je recommande donc, ce n'est nullement la suppression de l'effort intellectuel, c'est la division de cet effort, qui ne doit pas porter à la fois sur les parties et sur le tout. L'effort a été fait pour les parties; il faut en profiter et montrer à l'enfant que cet effort lui a été utile, puisqu'on ne le lui demande plus. Il faut économiser le travail intellectuel; l'habitude des choses est une véritable épargne, un trésor merveilleux, qui ne se perd que lorsqu'on n'en use pas; grâce à ce trésor acquis, on peut aller plus loin, et c'est précisément parce qu'il nous permet de disposer de notre attention, de la porter ailleurs, sur d'autres difficultés, qu'il est si précieux. Loin d'inspirer aux enfants le mépris de l'habitude, il faut leur montrer qu'elle est la récompense de leur travail, et, s'il faut tirer de l'arithmétique une leçon de morale, c'est à celle-là que je m'arrêterai.

Ceci me ramène à cette comparaison de l'en-

seignement du calcul, du français, de l'histoire ou de la morale, dont il a été parlé au début. Puisqu'il y a plusieurs enseignements à l'école, c'est sans doute qu'aucun d'eux ne peut remplacer les autres ; il faut tirer de chacun ce qu'il peut donner, et ne pas regretter de ne pouvoir le tirer des autres ; l'instituteur qui donne tous ces enseignements, n'a pas à connaître de pareils regrets.

2. — Sur un théorème d'arithmétique.

A Monsieur F. Marotte.

CHER AMI,

Dans le numéro de juillet de la *Revue*, M. G. F. appelle l'attention sur le théorème fondamental d'après lequel un nombre premier qui divise un produit de plusieurs facteurs divise certainement l'un d'eux et sur les propositions connexes. L'ensemble de ces propositions constitue assurément un des chapitres les plus difficiles de l'Arithmétique. M. G. F., qui a bien voulu signaler la façon dont ce sujet est traité dans mes *Leçons d'Arithmétique* et dans mes *Leçons d'Algèbre*, me donne l'occasion d'en dire deux mots après lui et d'expliquer les raisons pour lesquelles j'ai adopté un ordre plutôt qu'un autre.

J'ai adopté l'ordre et les démonstrations qui se trouvent dans les Leçons de Lejeune Dirichlet sur la théorie des nombres, telles que les a publiées M. Dedekind. Lejeune Dirichlet établit d'abord la proposition :

A. — *On ne change pas l'ensemble des diviseurs communs à deux nombres ou, ce*

qui revient au même, le plus grand commun diviseur de ces deux nombres, en multipliant ou en divisant l'un d'eux par un nombre premier à l'autre. En d'autres termes, si a, b, c, sont des nombres entiers et si c est premier à b, le plus grand commun diviseur de ac et de b est le même que celui de a et de b.

En supposant que b divise ac (que b soit le plus grand commun diviseur de b et de ac), on en déduit la proposition :

B. — *Si un nombre divise un produit de deux facteurs et s'il est premier à l'un de ces facteurs, il divise l'autre.*

En supposant que b soit premier à a comme à c, on a la proposition :

C. — *Un nombre premier aux facteurs d'un produit est premier à ce produit.*

L'habitude française (au moins depuis l'Arithmétique de Joseph Bertrand) était d'établir d'abord la proposition B. Or, cette démonstration est identique à celle de la proposition A. Il me paraît hors de doute que, lorsqu'il n'y a rien de plus à faire pour cela, mieux vaut démontrer une proposition générale qu'une proposition particulière, contenue dans cette proposition générale. Mais ici la démonstration de la proposition générale paraît un peu moins artificielle que celle de la proposition B ; on n'est pas étonné de voir figurer dans cette démonstration le plus grand commun diviseur, qui intervient dans l'énoncé; lorsqu'on démontre B seulement, on ne sait d'où vient ce plus grand commun diviseur. J'accorde d'ailleurs que la démonstration de la proposition A (ou B) est de celles que les élèves ont de la peine à retenir; il semble que sa perfection même

les déroute; de plus, il leur faut quelque effort pour reconnaître que B est contenu dans A. Enfin, il importe d'insister auprès d'eux sur la façon dont toute cette théorie intervient dans la démonstration de la proposition :

D. — *Un nombre ne peut se décomposer en facteurs premiers que d'une seule façon.*

Chacun sait que, si l'on admet cette proposition, les théorèmes A, B, C, et bien d'autres, se démontrent d'une façon très simple et très naturelle et, assurément, plus d'un professeur s'est demandé s'il ne vaudrait pas mieux prendre cette proposition comme point de départ. Je vois deux façons de le faire.

L'une qui, pour ma part, ne me scandaliserait nullement dans un enseignement très élémentaire et à tendances pratiques, consisterait à énoncer simplement le théorème, à dire aux élèves qu'on le démontre en toute rigueur et à laisser la démonstration de côté, parce qu'elle est difficile. Tant mieux si quelques élèves la réclament.

Vous savez, mon cher ami, que, pendant longtemps les programmes de l'École polytechnique stipulaient expressément qu'on ne demanderait point la démonstration de l'existence d'une racine réelle ou imaginaire, pour les équations dont le premier nombre est un polynome. Le mal n'était pas grand, pourvu qu'on expliquât bien aux élèves le sens de cette proposition. Cela me rappelle qu'Hermite, il y a un peu plus de quarante ans, nous signalait à l'École normale la commodité qu'il y aurait à admettre, en restant dans le domaine des nombres réels, que tout polynome à une variable est un produit de binomes et de tri-

nomes du premier et du second degré. Ce souvenir est à peine une digression : en Algèbre et en Arithmétique, les mêmes questions se posent; j'y reviendrai tout à l'heure.

L'autre façon de faire consiste à établir le théorème D par la voie la plus courte : la plus courte que je connaisse est celle qu'a suivie Gauss; au début des *Disquisitiones* (n° 14) il démontre directement que :

E. — *Si un nombre premier divise un produit de plusieurs facteurs, il divise l'un d'eux.*

Voici comment Gauss s'exprime au sujet de ce théorème :

Hujus theorematis demonstratio jam ab Euclide tradita, El. VII, 32. Nos tamen omittere eam noluimus, tum quod recentiorum complures seu ratiocinia vaga pro demonstatione venditaverunt, seu theorema omnino prœterierunt, tum quod indoles methodi hic adhibitæ, qua infra ad multo reconditiora enodanda utemur, e casu simpliciori facilius deprehendi poterit[1].

Puisque je n'en ai point fait tout à l'heure, permettez-moi maintenant une petite digression.

J'ai cru comprendre, d'après la note de M. G. F., que l'habitude s'est répandue, parmi les élèves, d'appeler le théorème B, théorème de Gauss. Comment a-t-on bien pu laisser se

1. La démonstration de ce théorème a déjà été donnée par Euclide, *El. VII*, 32. Nous n'avons pas cependant voulu l'omettre, tant parce que plusieurs auteurs modernes ont présenté des raisonnements vagues au lieu de démonstrations, ou bien ont négligé ce théorème, que dans le but de faire mieux saisir, par ce cas très simple, l'esprit de la méthode que nous appliquerons par la suite à des points bien difficiles.

répandre une pareille habitude et d'où vient-elle? Depuis longtemps, cher ami, vous connaissez mes manies et vous savez que les deux plus fortes consistent à ne pas vouloir qu'on dise circonférence au lieu de cercle et qu'on affuble chaque théorème d'un nom propre. De cette dernière manie, je vous développerai peut-être un jour toutes les raisons, si vous le voulez bien, mais le présent exemple suffirait à la justifier. Eh! quoi! Voilà une théorie fondamentale, dont on n'a pas dit aux élèves qu'elle se trouvait déjà dans Euclide pour tout ce qu'elle a d'essentiel! Qu'on ne les oblige pas à apprendre la langue des Grecs, j'en suis d'avis, mais qu'on leur laisse tout ignorer du merveilleux génie de cette race privilégiée, qu'on leur laisse croire que l'Arithmétique commence à Gauss!... Au moins, ce n'est pas la faute de ce dernier; la citation qui précède le prouve assez. Je reviens à cette citation.

Elle montre qu'au moment où Gauss écrivait, le point qui nous occupe était mal enseigné : il y a là une petite étude historique à faire qui devrait tenter quelqu'un de ceux qu'intéresse l'histoire de l'enseignement des mathématiques; mais passons. Elle montre aussi que Gauss était content de sa démonstration, qui est fort simple[1], mais que nos élèves trouveraient assurément aussi difficile à se rappeler que la démonstration des théorèmes A ou B.

Mettons que, comme difficulté, les deux démonstrations se valent. J'estime très légitime d'adopter la démonstration de Gauss, d'en déduire

1. Je l'ai reproduite dans mes *Leçons d'Arithmétique*.

le théorème D, puis toute la théorie du plus grand commun diviseur, du plus petit commun multiple, etc...

Après avoir réfléchi, je n'ai pas adopté cet ordre. Tout d'abord, je ne crois pas qu'il apporte beaucoup de facilités aux élèves ; dans ces conditions, pourquoi changer nos habitudes d'enseignement ? Le petit changement que j'ai proposé, en adoptant l'ordre de Dirichlet, est de ceux dont on peut bien, si conservateur qu'on soit, laisser la liberté aux auteurs ; tout revient à remarquer qu'une démonstration (qu'on ne change pas) prouve un peu plus qu'il ne paraissait. Mais cette raison routinière n'est pas la plus forte en faveur de l'ordre suivi par Dirichlet.

La théorie du plus grand commun diviseur et les propositions A, B, C, regardées comme conséquence de cette théorie, se transportent en Algèbre à peu près sans rien changer. On n'a qu'à remplacer les mots *nombre entier* par le mot *polynome;* des polynomes à une variable on passe sans difficulté aux polynomes à plusieurs variables ; la même théorie s'étend encore dans d'autres parties de l'arithmétique ou de l'Algèbre supérieures, et cela sans aucun effort. Au contraire, qu'on pense à la difficulté avec laquelle s'étend la notion de nombre premier ! Déjà, en Algèbre, la notion de polynome premier est liée à celle du domaine de rationalité, qui n'est pas d'une nature élémentaire, et pour ce qui est de l'extension de la notion de nombre premier aux entiers algébriques ou à la démonstration du théorème analogue au théorème D, vous savez quels efforts extraordinaires ont exigés ces généralisations.

Eh bien ! C'est là, à mon sens, une raison très forte en faveur de l'ordre de Dirichlet : *il est plus élémentaire*. On ne s'en aperçoit pas, je l'accorde, si on se borne aux programmes de nos lycées : à ce point de vue, laquelle des deux notions *plus grand commun diviseur* ou *nombre premier* doit-elle être regardée comme plus *primitive*[1] ? Il est bien difficile de répondre et il paraît même assez vraisemblable de supposer que la seconde s'est présentée historiquement avant la première. Le développement ultérieur de la science conduit à regarder la notion de plus grand commun diviseur comme antérieure à celle de nombre premier en raison de la facilité avec laquelle elle se généralise. Pour moi, cette raison est suffisante si même on ne veut pas dépasser les éléments. On peut bien ne pas partager ce sentiment, mais on accordera que, au moins pour ceux qui veulent apprendre l'algèbre, il y a *économie* à adopter l'ordre de Dirichlet, d'autant que cet ordre n'est pas plus compliqué que l'autre.

1. On sait combien les notions de plus grand commun diviseur et de plus petit commun multiple sont étroitement liées ; on ne sera pas étonné qu'il soit possible de prendre la seconde comme point de départ : c'est ce qu'a fait Stieltjes dans un mémoire malheureusement inachevé inséré dans les *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*.

Je signale encore le raisonnement fort simple de Poinsot, reproduit p. 457 de mon *Arithmétique;* c'est un raisonnement classique dans la théorie des groupes. Le théorème B en ressort très aisément.



CHAPITRE XI

L'ANALYSE

1. — Préface de l'Introduction à la théorie des fonctions d'une variable.

Quoique les vérités mathématiques se déduisent, dans un ordre rigoureux, d'un petit nombre de principes réputés évidents, on ne parvient point à les posséder pleinement en commençant par ces principes, en en suivant pas à pas les déductions, en allant toujours dans le même sens du connu à l'inconnu, sans jamais revenir en arrière sur un chemin où l'on n'a rien laissé d'obscur. Le sens et la portée des principes échappent au débutant, qui saisit mal la distinction entre ce qu'on lui demande d'accorder et les conséquences purement logiques des hypothèses ou des axiomes ; parfois, la démonstration lui paraît plus obscure que l'énoncé ; c'est en vain qu'il s'attarderait dans la région des principes pour la mieux connaître, il faut que son esprit acquière des habitudes qu'il n'a pas, qu'il aille en avant, sans trop savoir ni où il va, ni d'où il part ; il prendra confiance dans ce mode de raisonnement auquel il lui faut plier son intelligence, il s'habituera aux symboles et à leurs combinaisons. Revenant ensuite sur ses pas, il

sera capable de voir, du point de départ et d'un seul coup d'œil, le chemin parcouru : quelques parties de la route resteront pour lui dans l'ombre, quelques-unes même seront peut-être entièrement obscures, mais d'autres sont vivement éclairées ; il sait nettement comment on peut aller de cette vérité à une autre ; il sait où il doit porter son attention ; ses yeux, mieux exercés, arrivent à voir clair dans ces passages difficiles dont il n'aurait jamais pu se rendre maître s'il ne les avait franchis ; il est maintenant capable d'aller plus loin ou de suivre une autre direction ; il entre en possession de vérités nouvelles qui s'ajoutent aux vérités anciennes et qui les éclairent ; il s'étonne parfois des perspectives inattendues qui s'ouvrent devant lui et lui laissent voir, sous un aspect nouveau, des régions qu'il croyait connaître entièrement ; peu à peu les ombres disparaissent et la beauté de la Science, si une dans sa riche diversité, lui apparaît avec tout son éclat.

Ce qui se passe dans l'esprit de celui qui étudie les Mathématiques n'est que l'image de ce qui s'est passé dans la création et l'organisation de la Science ; dans ce long travail, la rigueur déductive n'a pas été seule à jouer un rôle. On peut raisonner fort bien et fort longtemps sans avancer d'un pas, et la rigueur n'empêche pas un raisonnement d'être inutile. Même en Mathématiques, c'est souvent par des chemins peu sûrs que l'on va à la découverte. Avant de faire la grande route qui y mène, il faut connaître la contrée où l'on veut aller ; c'est cette connaissance même qui permet de trouver les voies les plus directes ; c'est l'expérience seule qui indique

les points où il faut porter l'effort ; ce sont les difficultés, parfois imprévues, qui se dressent devant les géomètres, qui les forcent à revenir au point de départ, à chercher une route nouvelle qui permette de tourner l'obstacle. S'imagine-t-on, par exemple, les inventeurs du Calcul différentiel et intégral s'acharnant, avant d'aller plus loin, sur les notions de dérivée et d'intégrale définie ? Ne valait-il pas mieux montrer la fécondité de ces notions, dont l'importance justifie le soin qu'on a mis à les éclaircir ? Cette revision même, qu'on a faite de notre temps, l'aurait-on entreprise sans les questions que l'étude des fonctions et particulièrement des séries trigonométriques a posées d'une manière inévitable ?

Pour en revenir à l'enseignement, il me semble que, dans notre système d'instruction, la revision des principes de l'Analyse s'impose nécessairement comme transition entre les matières que l'on traite dans les Cours de Mathématiques spéciales et celles que l'on étudie soit dans les Facultés, soit dans les Écoles d'enseignement supérieur. A la fin de la classe de Mathématiques spéciales, les élèves sont maîtres d'un nombre de faits mathématiques déjà considérable ; ils possèdent les éléments de l'Algèbre, de la Géométrie analytique, et même du Calcul différentiel et intégral. Un classement rigoureux de ces matériaux est indispensable. C'est pour faciliter ce travail, en ce qui concerne l'Analyse, que je me suis décidé à publier le présent Livre, où j'ai développé quelques Leçons faites à l'École Normale en 1883. Je l'ai fait aussi élémentaire que j'ai pu, en m'efforçant de rapprocher les choses

des principes, mais en essayant toutefois d'être particulièrement utile à ceux qui désirent pousser leurs études mathématiques beaucoup plus loin que je ne prétends les conduire.

Je n'ai eu qu'à me livrer à un travail d'arrangement et de rédaction : les faits mathématiques qui constituent et constitueront toujours les éléments de l'Analyse étaient acquis pour la plupart au commencement de ce siècle ; à la vérité, bien des démonstrations laissaient à désirer ; mais, après les exemples de rigueur donnés par Gauss, après les travaux de Cauchy, d'Abel, de Lejeune-Dirichlet, de Riemann, de M. O. Bonnet, de M. Heine, après l'enseignement de M. Weierstrass, divulgué et développé par ses disciples, après le Mémoire de M. Darboux sur les fonctions discontinues, les Livres de M. Dini et de M. Lipschitz, il ne semble pas qu'il reste quelque chose d'essentiel à élucider dans les sujets auxquels je me suis borné.

On peut constituer entièrement l'Analyse avec la notion de nombre entier et les notions relatives à l'addition des nombres entiers ; il est inutile de faire appel à aucun autre postulat, à aucune autre donnée de l'expérience ; la notion de l'infini, dont il ne faut pas faire mystère en Mathématiques, se réduit à ceci : après chaque nombre entier, il y en a un autre.

2. — Préface des leçons d'algèbre et d'analyse.

J'ai essayé de rédiger les présentes *Leçons* dans un esprit conforme à celui des programmes de la classe de Mathématiques spéciales tels qu'ils ont été arrêtés, en 1904, après entente

entre les représentants des Ministères intéressés. Je me suis appliqué de mon mieux à rendre les choses visibles, à éviter les détours subtils et l'abus du formalisme, à écarter les propositions particulières qui n'intéressent que les curieux, ou les généralités sans application, à pousser enfin les théories jusqu'à la réalisation numérique.

Toutefois, lorsqu'il m'est arrivé de laisser de côté certains raisonnements, indispensables pour établir un théorème en toute rigueur logique, j'ai cru devoir en avertir le lecteur et lui signaler les difficultés ou les lacunes. J'ai horreur d'un enseignement qui n'est pas toujours sincère : le respect de la vérité est la première leçon morale, sinon la seule, que l'on puisse tirer de l'étude des sciences. Sans doute, il y a des démonstrations qui ne sont pas rigoureuses et qui sont excellentes, parce qu'elles laissent dans l'esprit une image qui ne s'efface pas, que l'on voit en même temps que la proposition, et dont la clarté suffit à guider dans les applications ; si elles présentent quelque lacune, il faut le savoir, et il est bon de savoir où est cette lacune. Aussi bien dans la vie pratique que dans la spéculation, il importe de distinguer ce que l'on comprend avec certitude, ce dont on est justement persuadé, ce que l'on croit ; il est bon de distinguer les choses que l'on possède entièrement et celles dont on peut user, sous certaines conditions.

Je n'avais ni la place, ni les connaissances nécessaires pour indiquer partout, d'une façon sûre, la filiation historique des idées ; je n'ai fait nulle histoire et je le regrette. Sauf quelques noms consacrés par l'usage, j'ai évité les noms

propres ; l'habitude d'accoler un nom à toutes les propositions me semble un abus qui n'a rien à faire avec l'histoire. Lors même que cette habitude est consacrée, elle ne va pas sans inconvénient : il est fâcheux qu'un élève de Mathématiques spéciales ne connaisse Descartes que par la règle des signes, Newton que par la méthode d'approximation ou la formule du binome et qu'il soit tenté de regarder Rolle comme un aussi grand mathématicien que Descartes ou Newton. Je n'ai point cité davantage, bien qu'ils fussent souvent d'excellents géomètres, les auteurs des démonstrations ou des améliorations à des démonstrations antérieures : il m'aurait été parfois difficile de distinguer entre les souvenirs de mes lectures, de mes conversations avec mes maîtres, mes collègues ou mes élèves. Ne pouvant le faire partout, je ne l'ai fait nulle part.

N'ayant cité personne, je dois m'excuser d'autant plus d'avoir souvent renvoyé le lecteur à mon *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable*. Ce dernier livre a été écrit avec des préoccupations tout autres que les présentes *Leçons*. Je me suis proposé d'y présenter les choses, sous une forme abstraite, avec une entière rigueur logique : cette rigueur est indispensable quand on veut pénétrer dans certains domaines de la Science, où celui qui prétendait s'en passer commettrait à coup sûr les plus lourdes erreurs ; celles-ci ne sont guère à craindre, au moins actuellement dans les applications des Mathématiques, et il n'est pas mauvais, en commençant, de ne pas se laisser paralyser par la terreur d'y tomber : quelques lecteurs, toutefois, peuvent désirer y connaître le complément d'un raison-

nement, la suite d'une théorie : c'est à ce désir possible que j'ai voulu répondre.

En achevant la rédaction, j'ai été quelque peu effrayé de la longueur de mon manuscrit : je voudrais me persuader que cette longueur tient à l'abondance des explications et au nombre des exemples : je serai heureux si le lecteur trouve facile la lecture de ces Leçons et s'il juge qu'il aurait bien pu traiter seul les exemples que j'ai développés. Toute brièveté a son mérite, même la brièveté verbale, que je n'ai nullement cherchée ; mais la véritable brièveté n'est pas celle-là : le parfait enseignement serait, à mon sens, un enseignement tel que celui qui l'a reçu et qui se l'est complètement assimilé s'étonne du peu de place que tiennent dans sa propre pensée les principes fondamentaux, les théories qui s'en déduisent, les méthodes qui en résultent, parce que ces principes sont si clairs, ces déductions si naturelles, ces méthodes si aisées qu'il peut à chaque instant les retrouver sans effort. Est-il besoin de dire que je n'ai nullement la prétention de m'être approché de cet idéal, même de loin ?

3. — Un livre d'analyse[1].

Tous ceux qui sont un peu au courant des choses de notre enseignement savent, d'une part, que l'enseignement des Facultés des sciences et l'enseignement des lycées, terminé au baccalauréat, ne se raccordent pas, et, d'autre part, que la classe de Mathématiques spéciales, qui devrait relier les deux enseignements, n'a pour objet ni

1. Vogt (H.). *Éléments de Mathématiques supérieures.*

la formation scientifique des jeunes esprits, ni la préparation aux carrières ; on y passe trois ou quatre ans et il n'est douteux pour personne que ceux qui, au bout de trois ou quatre années, n'ont pas réussi au concours qu'ils avaient en vue, et même quelques-uns de ceux qui ont réussi, auraient pu mieux employer leur temps et leurs efforts. Il est donc très désirable et très naturel qu'il s'organise dans les Universités des enseignements que puissent suivre les élèves qui sortent de la classe normale de Mathématiques élémentaires, et où ceux-ci puissent acquérir les connaissances mathématiques indispensables aujourd'hui pour suivre un cours un peu élevé de Physique ou de Chimie, ou pour se préparer à une carrière industrielle. Cela s'est fait dans plusieurs centres universitaires, et en particulier à Nancy, où l'on sait que la préparation aux études physico-chimiques, dirigée par des savants éminents, est fortement organisée.

C'est à cet enseignement que correspond le volume que publie aujourd'hui M. Vogt. L'auteur s'est préoccupé de dire ce qui était nécessaire, de le dire clairement et de ne dire que cela. Il n'a tenu aucun compte des habitudes ou des routines de l'enseignement ; il a même eu le courage de sacrifier ces arrangements esthétiques, ces beaux enchaînements, où le professeur cherche volontiers sa jouissance. M. Vogt guide son lecteur tantôt sur une route, tantôt sur une autre : ce n'est pas une route qu'il prétend lui faire connaître, mais un pays. On se dit parfois qu'il aurait pu suivre un autre ordre, et cela n'est pas douteux ; mais on finit par reconnaître que celui qu'il a adopté est parfaitement raisonnable.

Comment a-t-il fait le départ des matières ? Il l'a fait en se préoccupant surtout des besoins ultérieurs de ses élèves, non des jolies choses qu'il pourrait leur dire sur chacun des sujets qu'il traitait. Disons franchement qu'il s'est moins proposé de former des mathématiciens que de donner à ses élèves des connaissances qui pussent leur servir. Évidemment aussi, il n'a pas craint de demander conseil à ses collègues, de leur emprunter des exemples, et il s'est résigné à ne pas parler des sujets dont ceux-ci n'avaient pas besoin : il a su avoir du désintéressement. Son exposition, toutefois, reste rigoureuse, sans excès et sans scrupules puérils, mais toujours claire et scientifique.

En fermant son livre, après l'avoir feuilleté, on s'étonne de tout ce qu'il contient. Eh quoi ! tout cela en moins de cinquante leçons ? Cela pourrait donc s'apprendre en deux mois ? Et combien d'années y passent la plupart des étudiants, avant même de savoir tout ce qu'il y a dans le livre de M. Vogt ? Et alors que de temps perdu ! Il ne faut rien exagérer : pour ceux qui veulent être mathématiciens, l'auteur serait le premier à proclamer l'insuffisance de ses leçons ; même pour les autres, qui ne veulent apprendre que ce qu'il faut de Mathématiques pour s'en servir, ces *Eléments de Mathématiques supérieures* représentent le travail d'une bonne année, et un travail soutenu. Il ne suffit pas d'avoir entendu, compris, appris une leçon ; il faut s'habituer à appliquer les méthodes.

CHAPITRE XII

LA GÉOMÉTRIE

S'il n'était pas nécessaire d'être mathématicien pour comprendre ce que sont les mathématiques, pour avoir quelque idée des problèmes qu'elles résolvent et qu'elles posent, du domaine qu'elles ont conquis, et des vastes territoires où elles pénètrent, il faudrait conseiller à tous de lire ces douze conférences, si riches de faits et de suggestions, si variées dans leurs sujets, mêlant l'histoire de la Science, les vues philosophiques, les aperçus ingénieux, les théorèmes précis, les généralisations hardies, les conseils pédagogiques, abordant tour à tour les branches les plus variées de la Science, l'Arithmétique, l'Algèbre, la haute Analyse, la Géométrie. Je ne sais s'il est juste de faire à la Géométrie une place à part dans cette énumération ; car, avec M. Klein[1], la Géométrie, ou plutôt l'intuition géométrique est partout : un réseau de points, figuré dans un plan et regardé comme il faut, nous donne une représentation concrète des nombres idéaux de M. Kummer; la considération de la figure formée par trois arcs de cercle sur une sphère vient éclairer les propriétés les plus cachées des fonctions hypergéométriques; l'icosaèdre régulier donne

1. Klein. Conférences sur les mathématiques (Chicago).

un corps aux recherches sur la résolution de l'équation du cinquième degré ; à ce propos, voici la conception si profonde de Galois qui s'élargit : son groupe de permutations est remplacé par un groupe de substitutions linéaires et le problème de la résolution des équations, ou plutôt de leur réduction à des formes normales, est posé en des termes nouveaux. Après avoir parlé du caractère transcendant du nombre, M. Klein imaginera que le plan soit recouvert par tous les points dont les coordonnées sont des nombres algébriques et il observera que, si pressés les uns contre les autres que soient ces points, la courbe qui a pour équation $y = e^x$ ne passe que par un seul d'entre eux ; s'il s'agit des fonctions elliptiques, hyperelliptiques ou abeliennes, on ne s'étonne pas, sans doute, tout en admirant leur richesse et leur beauté, de voir surgir les interprétations géométriques ; mais M. Klein poussera la coquetterie jusqu'à prendre dans la géométrie même un exemple de ce qui ne peut être ni figuré ni imaginé. Une courbe sans tangente, c'est la considération d'une chaîne formée de cercles dont chacun touche le précédent et le suivant et engendre de nouveaux cercles en se réfléchissant indéfiniment par inversion sur les autres, qui lui fournit cet ingénieux exemple, dans la courbe sur laquelle viennent se condenser tous les points de contact.

Pour lui, les êtres mathématiques ne sont pas des abstractions ; il les voit et il les fait voir, qui se jouent tantôt dans les espaces non euclidiens, tantôt dans cet espace vulgaire dont se contentent quelques géomètres, qui ne veulent pas sans doute que l'espace n'existe que dans notre pensée.

Le don de *voir*, qui lui a été départi si généreusement, M. Klein le rapporte avec modestie à la race teutonique, dont la puissance naturelle d'intuition serait un attribut prééminent; mais ne pousse-t-il pas la modestie trop loin, lorsqu'il oppose à l'attribut de sa race la puissance logique et critique des Latins et des Israélites! Qui le croirait, s'il se refusait à lui-même cette puissance? et n'oublie-t-il pas que lorsqu'il s'est amusé à classer les mathématiciens en logiciens, en formels et en intuitifs, ce n'est pas parmi les représentants des races latine ou hébraïque qu'il a trouvé le type du logicien, d'ailleurs très illustre, caractéristique et bien choisi?

Dans ces lectures, dont le but était de faire connaître à ses auditeurs l'état des Mathématiques modernes, les questions les plus actuelles, M. Klein est naturellement amené à parler souvent de ses propres recherches; personne ne s'en plaindra et, à vrai dire, le tableau eût été par trop incomplet s'il les avait passées sous silence; il fait d'ailleurs une large part à ses nombreux élèves, dont plusieurs sont déjà des maîtres illustres : on sait que, pour lui, un élève est un collaborateur et qu'il associe généreusement à ses propres recherches ses auditeurs de Gœttingue. Mais il ne s'enferme pas dans l'École dont il est le maître, et il a su trouver pour M. Sophus Lie une flatterie singulièrement délicate; c'est deux lectures entières qu'il consacre au grand géomètre norvégien, tout en déclarant d'abord qu'il entend n'en considérer le génie qu' « à l'état naissant ». A la vérité, le monument qu'a élevé M. Sophus Lie ne fera pas oublier son mémoire *Ueber complexe insbeson-*

dere Linien- und Kugel-complexe, etc. Ce mémoire, dont M. Klein expose quelques résultats essentiels, lui donne l'occasion de rappeler son propre Programme d'Erlangen, où il a expliqué comment chaque système de géométrie est caractérisé par son groupe et d'opposer en quelque sorte, l'un à l'autre, les groupes de ces deux géométries des sphères qu'ont fondées M. Lie d'une part, M. Darboux de l'autre. Une fois, dans le cours de ses lectures, il abandonnera les Mathématiques pures pour parler des Mathématiques appliquées et des Sciences objectives; là même ses préoccupations habituelles le ressaisissent un instant et il ne peut s'empêcher de rappeler en passant comment la considération des courants électriques sur des surfaces fermées vient *illustrer* les théories de Riemann; mais ce n'est qu'un *a parte* : il classe les diverses sciences appliquées d'après la quotité de chiffres qui figurent dans les nombres qu'elles considèrent : ainsi l'astronomie emploie des nombres de sept chiffres; la chimie n'emploie guère que des nombres de deux ou trois chiffres. M. Klein insiste sur le caractère toujours provisoire des nombres, des lois et des formules que l'on trouve dans les sciences expérimentales; il émet l'idée ingénieuse que, puisque ces sciences ne peuvent se servir que de formules approchées, il doit être possible de constituer, à l'usage de ceux qui s'y livrent, une Mathématique abrégée.

Je ne sais si j'ai pu donner quelque idée de la variété et de l'intérêt des sujets que M. Klein développe, indique, touche d'une main légère, ou approfondit; il y aurait une insupportable prétention à vouloir analyser une par une les lectures

où l'on a toujours affaire à trois maîtres à la fois, au moins : un géomètre, un philosophe, un artiste. Lequel faudrait-il louer davantage ? Je ne sais, et si on le demandait à M. Klein et qu'il pût répondre, ne serait-il pas embarrassé de le faire ? S'il ressemblait à d'autres, il préfèrerait sans doute celui des trois qui est le moins développé, mais, encore une fois, lequel ! Je me contenterai donc d'indiquer en terminant la liste de ces conférences : elle est déjà intéressante, et sans doute elle ne suffira pas à satisfaire la curiosité des lecteurs du *Bulletin*.

*
* *

Le petit Volume que M. Duporcq[1] publie sous ce titre modeste rendra d'incontestables services à une catégorie assez nombreuse d'étudiants, qui ont entendu parler des méthodes de la *Géométrie moderne*, mais qui, pressés par les exigences des examens, n'ont pas eu le temps de se familiariser avec ces méthodes, dont il est sans doute inutile de vanter ici l'élégance et la fécondité. Les études ultérieures qu'ils ont faites dans les Écoles techniques, peuvent très bien leur avoir laissé la curiosité et le goût de ce Chapitre de la Science, qui avait été, autrefois, entr'ouvert devant eux, et où se trouvaient traitées, en quelques lignes, des questions dont ils n'entrevoyaient la solution qu'au travers de longs calculs. Il est certain, d'un autre côté, que tous ceux qui veulent acquérir des connaissances d'ensem-

1. Duporcq (E.). *Premiers principes de Géométrie moderne* à l'usage des élèves de Mathématiques spéciales et des candidats à la licence et à l'agrégation. 1 Vol. in-8°, Gauthier-Villars, Paris ; 1899.

ble sur la Géométrie, et développer un peu ces connaissances dans n'importe quelle direction, doivent s'habituer à parler le langage de la *Géométrie moderne* et à en manier les méthodes. Enfin ceux des élèves de la classe de Mathématiques spéciales, qui, grâce à une intelligence un peu vive, ont quelque loisir, tireront surtout grand parti du Livre de M. Duporcq. Ce dernier estime que l'étude de la *Géométrie moderne* est plus profitable pour la formation de l'esprit que l'étude de l'équation aux inégalités séculaires. Il ne semble pas certain que cette dernière étude prenne dans l'enseignement une place si démesurée, eu égard à l'importance incontestable de ladite équation, qu'elle méritât une pareille mise à l'index, et peut-être, la plupart des professeurs de Mathématiques spéciales laissent-ils à l'enseignement de la Géométrie plus de place que ne pense l'auteur. Dans des temps très reculés, l'enseignement que l'on donnait dans cette classe était destiné à préparer les élèves à l'étude du calcul différentiel et intégral, et, par là, de la Mécanique rationnelle, étude qui, semble-t-il, reste l'objet essentiel de l'enseignement dans les hautes écoles techniques, en raison même de l'utilité que présente, dans les applications, la connaissance de ces chapitres de la Science. Il ne manque pas de bons esprits pour regretter que ce but ait été un peu oublié. Ceux des professeurs ou des examinateurs qui l'ont encore devant les yeux sont aussi sans doute ceux qui ne font pas à la *Géométrie moderne*, dans l'enseignement, toute la place que d'autres voudraient lui attribuer. Je crois bien que personne n'en conteste l'importance intrinsèque ; la discussion roule seu-

lement sur le moment et le lieu où elle doit être enseignée ; doit-on la faire pénétrer résolument dans l'enseignement élémentaire, doit-on la réserver pour les Facultés, où elle pourrait être exposée avec l'ampleur qu'elle comporte ? ou bien faut-il s'arrêter à une solution intermédiaire, et se contenter de donner aux élèves des indications qui ne peuvent manquer d'exciter l'intérêt de ceux dont la curiosité n'est pas atrophiée ? C'est cette dernière solution qui, le plus souvent, est adoptée dans la pratique, et il ne semble pas qu'elle soit la plus mauvaise.

Dans la mesure où la *Géométrie moderne* permet de simplifier et de coordonner les théories qui font l'objet de l'enseignement de la classe de Mathématiques spéciales, de donner plus de généralité aux énoncés des propositions qui constituent ces théories, plus de portée aux démonstrations, tout en les rendant plus brèves, il est bon de l'introduire. Et, sans doute, si les élèves s'aperçoivent que les indications qu'on est ainsi amené à leur donner sont susceptibles d'être prolongées, et ne sont, pour ainsi dire, qu'une amorce, il n'y a à cela que des avantages. Il ne faut pas, toutefois, oublier que la *Géométrie moderne* est d'une médiocre utilité pour l'étude des éléments du Calcul différentiel et intégral, et que l'introduction courante des éléments imaginaires en Géométrie ne va pas sans quelque difficulté. Je n'irai pas jusqu'à dire que la considération d'une tangente en un point imaginaire d'une courbe suppose qu'on ait expliqué ce qu'est la dérivée d'une fonction d'une variable complexe, puisque, aussi bien, on reste dans le domaine des courbes algébriques et que la théorie des *racines*

égales se trouve être suffisante; encore faut-il reconnaître, comme on l'a fait d'ailleurs il y a longtemps, que les éléments imaginaires n'étant définis que par rapport à un système d'axes, les propriétés des nombres imaginaires auxquelles s'applique le langage géométrique ont un caractère d'invariance qu'il faudrait d'abord établir, si l'on veut donner à ce langage la précision et la rigueur que l'on exige d'ordinaire en Mathématiques. A la vérité, cela est le plus souvent très facile; il en résulte cependant quelques longueurs. Et si la théorie des formes algébriques, dont la *Géométrie moderne* n'est d'ordinaire qu'une expression très élégante, doit envahir à son tour la classe de Mathématiques spéciales, quelques personnes timides ne s'effaroucheront-elles pas, et sera-t-on bien sûr que cet *esprit géométrique* dont M. Duporcq souhaite avec raison le développement y gagnera beaucoup?

Le développement de l'*esprit géométrique* accompagne-t-il nécessairement l'habitude d'un langage géométrique où les mots ont si peu la signification concrète de la Géométrie proprement dite que, pour les entendre, il faut perdre l'habitude des figures géométriques? A ce degré d'abstraction, la soi-disant Géométrie ressemble terriblement à l'Algèbre, à cette Algèbre dont les équations donnent aux propositions de la *Géométrie moderne* leur base solide et leur signification réelle. Aussi bien, il semble fort raisonnable, pour des commençants, de ne pas trop séparer des chapitres de la Science qui se recouvrent si parfaitement et qui, sauf le langage qu'on y parle, les notations qu'on emploie, traitent du même objet. L'intelligence même du langage soi-

disant géométrique ne peut qu'y gagner, et les commençants risquent moins de parler une langue qu'ils n'entendent pas, d'être les dupes d'analogies de mots, de se laisser éblouir par des paradoxes verbaux.

L'oubli partiel du but primitif de la classe où l'on prépare à nos grandes Écoles, que je signalais plus haut, tient sans doute à l'intérêt propre des matières qu'on y enseigne, et à cette recherche de la perfection que les professeurs apportent dans leur métier. Ces matières, on ne les enseigne plus comme une préparation, mais pour elles-mêmes, et aussi, bien entendu, pour satisfaire les examinateurs. Il est naturel que le langage de la *Géométrie moderne* ait pénétré dans l'enseignement, il n'est pas mauvais que cette pénétration ait été prudente et se soit faite toute seule. Ceux même qui auraient désiré qu'elle fût consacrée par une indication discrète insérée dans les programmes pourraient craindre une refonte de ces programmes et les excès qu'elle risquerait d'amener : la publication d'un bon Livre élémentaire, qui permette aux élèves de développer leurs connaissances, vaut assurément mieux qu'une telle refonte.

Il est grand temps de parler de celui que vient de publier M. Duporcq, car les observations qui précèdent ne le touchent en aucune façon, sauf peut-être une phrase de la Préface.

*
* *

La lecture des livres d'enseignement en usage dans les écoles des pays étrangers est chose instructive et intéressante : c'est un petit voyage

dans ces pays, une visite dans leurs établissements d'instruction, qui, sans doute, est très incomplète, mais qui est économique et dérange peu. Si le lecteur a quelque imagination, il peut, quitte à se tromper quelquefois, se figurer les maîtres et les élèves d'après ces livres ; au reste, il ne se trompera sans doute pas plus que ces voyageurs qui, pour avoir passé quelques mois dans un pays, se croient capables de pénétrer l'âme d'un peuple et d'en faire la psychologie.

Quoi qu'il en soit, puisque « la meilleure formation des professeurs de l'enseignement secondaire » est à l'ordre du jour et qu'il convient de montrer qu'on se préoccupe de cette question, je me permets, après bien d'autres, de signaler l'utilité, pour ces professeurs et ceux qui veulent le devenir, de lire les livres classiques publiés à l'étranger et de réfléchir sur les différences qu'ils présentent avec les nôtres, soit dans la façon de présenter les choses, soit dans le choix même des sujets qu'on y développe ou qu'on y sacrifie. Il est bon de choquer de temps en temps les habitudes qu'on a, et de se rendre compte des raisons mêmes qu'on a de garder quelques-unes de ces habitudes. Il serait donc souhaitable de voir se constituer dans les Bibliothèques de nos Lycées et des établissements où se préparent les futurs professeurs, une Section consacrée aux livres classiques étrangers. Si même ces livres étaient maniés par quelques-uns des élèves, il n'y aurait sans doute pas d'inconvénient à ce que ceux-ci se familiarisassent avec le vocabulaire scientifique d'une ou de plusieurs langues étrangères, dans des livres où la connaissance du sujet suffirait très souvent à les éclairer sur le sens des mots...

A propos de l'aire de l'hyperbole, il est question de logarithmes népériens, de la fonction et de la série exponentielles. A des élèves qui sont susceptibles d'avoir acquis ces notions, il ne peut être difficile de faire comprendre ce que c'est qu'une dérivée; je crois même que, au lieu de leur enseigner des procédés particuliers pour trouver l'aire de l'hyperbole et de la parabole, il est plus court de leur expliquer de suite la méthode générale, résultant de la recherche d'une fonction primitive. J'observe, en passant, que si l'on avait le courage d'employer la même méthode pour les volumes, on pourrait supprimer de l'enseignement de la Géométrie élémentaire une dizaine de leçons sur la mesure du prisme oblique, de la pyramide, de la sphère, etc., et les remplacer par des explications qui demanderaient bien un quart d'heure. Ce n'est pas que les méthodes dites *élémentaires* ne soient fort belles et fort intéressantes ; mais plus nous irons, plus la nécessité de gagner du temps dans l'enseignement des éléments, de faire pénétrer dans cet enseignement plus d'idées et d'idées plus générales, deviendra impérieuse. On peut d'ailleurs dire à ceux qui se préoccupent beaucoup du point de vue esthétique, que la généralité et la puissance d'une méthode ne sont pas pour l'enlaidir. Les Grecs avaient pour s'éclairer de fort belles lampes, que l'on admire dans les musées. L'éclairage électrique n'en est pas moins avantageux. Ceci, bien entendu, n'est nullement une critique à l'adresse de M. H. Müller ; dans son pays, comme ailleurs, il y a des habitudes et des programmes auxquels il faut bien se plier.

J'imagine que, parmi les arguments que font

valoir les gens qui veulent à tout prix que tout le monde apprenne le grec et le latin, celui-ci est un des meilleurs : il est impossible d'étudier les Mathématiques sans avoir appris le grec, puisqu'on se sert continuellement des lettres grecques dans les Traités de Mathématiques. Cet argument, en tous cas, a exactement la même valeur que celui, bien souvent répété, qui concerne les médecins et les pharmaciens, les noms grecs des maladies, les noms latins des médicaments, inscrits sur les bocaux que l'on sait. Sans agiter autrement ces graves questions, M. Müller[1] apporte une réponse suffisante, pour ce qui concerne les Mathématiques, en plaçant tout bonnement, à la fin de son livre, un alphabet grec, avec le nom des lettres qui y figurent, en majuscules et en minuscules.

*
* *

Le livre de M. Geissler[2] m'a fait penser à un enseignement qui me paraît possible et qui ne serait pas dénué d'intérêt : l'enseignement de la Cosmographie conçu comme préparant l'enseignement de la Géométrie. Cet enseignement serait, bien entendu, essentiellement descriptif : il donnerait l'occasion de présenter, au fur et à mesure qu'il se déroulerait, sous une forme intuitive, un certain nombre de notions géométriques essentielles sur la droite et le cercle, sur les

1. Muller (H.) et Hupe (A.). — *Die Mathematik auf den Gymnasien und Realschulen.*

2. Geissler (K.). *Anschauliche Grundlagen der mathematischen Erdkunde zum Selbstverstehen und zur Unterstützung des Unterrichts.*

droites et plans parallèles ou perpendiculaires, sur les mouvements de translation et de rotation, sur la sphère, sur les coordonnées ; avec de bonnes figures et un très petit nombre d'appareils, avec beaucoup de soin et de patience chez le maître, qui ne devrait pas craindre les digressions, cela me paraît parfaitement réalisable ; tout en acquérant la connaissance de faits astronomiques très intéressants, en développant en quelque sorte leur imagination géométrique et cinématique, ceux qui suivraient un pareil enseignement se rendraient peut-être compte de la nécessité d'une étude systématique et approfondie de cette Géométrie, dont les débuts, présentés sous la forme euclidienne, semblent aux enfants si étranges, si secs et si inutiles.

*
* *

Tant qu'il y aura des gens qui s'intéresseront à la meilleure manière d'enseigner, on discutera pour savoir s'il vaut mieux s'élever du particulier au général, ou s'il vaut mieux introduire, dès qu'on le peut, des vérités générales, pour en tirer la foule des propositions particulières qu'elles contiennent. Cela dépend du maître et des élèves, et la première méthode est bonne si le maître sait vraiment montrer le général dans le particulier, comme aussi la seconde, si le maître sait faire descendre à temps les idées générales et les incarner pour ainsi dire dans le concret; mais, à coup sûr, les vérités particulières sont stériles quand elles sont bornées à elles-mêmes, quand on n'en voit ni le lien, ni l'unité et aussi les idées générales, quand on s'y complaît unique-

ment, comme dans une sorte de rêve philosophique, et qu'on est incapable de les préciser dans les applications particulières qu'elles contiennent en puissance.

Le rôle primordial donné aux coordonnées trilinéaires est légitime et naturel dans un livre où l'on se propose essentiellement de familiariser le lecteur avec la Géométrie projective, où l'on entend ne pas dépasser cette Géométrie et même à peine la théorie des coniques et des quadriques; mais, si l'on se place à un autre point de vue, le concept de coordonnées est si général et la notion de coordonnées trilinéaires si spéciale, qu'on peut bien n'encourir aucun reproche pour dédaigner cette petite généralisation des coordonnées de Descartes; il va sans dire que cette observation n'a rien à faire avec le livre de M. d'Ovidio[1], qui suit bien un plan logique, parfaitement ordonné, mais il serait possible d'en trouver ailleurs des applications.

1. Ovidio (E. d'). *Geometria analitica.*



CHAPITRE XIII

QUESTIONS DIVERSES D'ENSEIGNEMENT ET DE MÉTHODE

1. — Une enquête sur la méthode de travail des mathématiciens.

La mode est aux enquêtes; quelques journalistes en vivent; on fait des enquêtes sur les sujets les plus sérieux ou les plus folâtres ; des lecteurs naïfs y cherchent la vérité; des philosophes espèrent en tirer parti pour mieux connaître les hommes.

Il s'agit tout d'abord de bien poser les questions et d'obtenir des réponses sincères, puis d'interpréter les réponses. Sur ces divers points, on peut, pour ce qui concerne l'enquête dirigée par M. Fehr[1], avec la collaboration de MM. Flournoy et Claparède, avoir toute confiance. Les questions étaient intelligemment posées ; la façon dont les réponses sont classées, résumées, discutées, manifeste une fois de plus, chez les auteurs de l'enquête, cette compétence, cette parfaite conscience, cette prudence et cette acuité dans la critique que leurs travaux antérieurs avaient déjà permis d'apprécier. Il n'était pas possible de tirer davantage des réponses qu'on leur a envoyées. Quant à la sincérité de ces réponses, il serait fort injurieux de

1. Fehr (H.), Flournoy (Th.). Claparède (Ed.). Enquête sur la méthode de travail des mathématiciens.

la mettre en doute, et, d'ailleurs, elle se montre toute nue.

« Notre étude est basée, disent les enquêteurs sur les documents provenant de plus d'une centaine de mathématiciens appartenant, pour la plupart, au temps présent. » Les enquêteurs ne disent pas combien ils avaient envoyé de questionnaires; mais il suffit de penser à la production mathématique, au nombre des périodiques et de leurs collaborateurs habituels pour être bien sûr que ceux qui ont répondu ne forment qu'une petite fraction de ceux qui ont été interrogés. Leur qualité, qui a des degrés, est excellente et, sans doute, elle apparaîtrait mieux encore si l'on pouvait tenir compte de ceux qui ont souhaité que leurs noms ne fussent pas livrés à la publicité. Si même toute comparaison de ce genre n'était pas très impertinente, l'ignorance où l'on est de beaucoup de noms ne permettrait pas de porter quelque jugement sur la valeur respective de ceux qui ont répondu et de ceux qui ne l'ont pas fait. Ces derniers sont assurément la très grande majorité. Est-ce paresse, timidité, modestie, oubli, indifférence ou dédain pôur les enquêtes, incapacité ou dégoût de la réflexion sur soi-même? Voilà un nouveau sujet d'enquête, à laquelle on devrait, pour leur apprendre, soumettre les mauvais correspondants. Et si l'on s'adressait à des physiciens, à des chimistes, à des naturalistes, à des lettrés, à des artistes, la proportion de ceux qui répondent serait-elle plus ou moins forte que pour les mathématiciens? Cette proportion dépend-elle des diverses sciences, des arts, voire des branches d'une même science? Ceux qui font de la Chimie organique réagissent-ils mieux, ou

moins bien, à l'interview, que ceux qui s'adonnent à la Chimie minérale? Que dire des architectes, des poètes, des musiciens, des peintres ou des comédiens? Voilà de belles questions.

Revenons à celles qui concernent les mathématiciens. Trop souvent, le petit nombre des réponses et leur variété ne permettent pas de tirer des conclusions. S'il semble établi que la plupart des mathématiciens aiment la musique et la promenade à pied, on trouve parmi eux du goût, de l'indifférence, de la répugnance pour les spéculations philosophiques et religieuses; la tendance de celui-ci « ressemblerait à celle de Pascal, un des plus beaux exemplaires d'*homme vivant* et *sentant* » ; celui-là se proclame profondément antireligieux ; la distinction entre les visuels, auditifs, moteurs, etc., n'a pas été bien saisie; les uns travaillent le matin, les autres le soir; les uns régulièrement, les autres par à-coups; certains ont besoin de silence, d'autres sont aidés par les bruits extérieurs, par une musique lointaine, mais pas mélancolique; il en est un qui réfléchit en laissant errer ses mains sur le piano et en chantant; ceux-ci ont besoin de huit heures de sommeil au moins, celui-là se contente de six heures. La plupart pratiquent et recommandent la sobriété ; un mange beaucoup.

On ne s'étonnera pas de les voir attribuer plus ou moins d'importance à la lecture, plus ou moins d'avantages ou d'inconvénients à l'érudition ; souvent, en lisant la signature, on peut prévoir la réponse. On ne s'étonnera pas non plus si ceux qui étudient les travaux des autres les étudient d'une façon active, en reconstruisant eux-mêmes les développements et les démonstrations.

Le goût des Mathématiques se manifeste habituellement de bonne heure. L'un de ceux qui ont répondu et dont on regrette de ne pas savoir le nom a, sur ce point, des souvenirs qui remontent au temps où il avait trois ans et demi.

Un point qui se rattache à cette précocité des grands mathématiciens, et sur lequel il aurait été, je le reconnais, quelque peu délicat de les interroger, n'a pas été touché par l'enquête : A quel âge ont-ils eu leurs idées maîtresses ? Mon frère (mais il ne parlait que des morts) soutenait volontiers qu'ils avaient toujours été en possession de ces idées avant trente ans ; assurément, il n'entendait pas par là qu'après cet âge de trente ans un Euler ou un Lagrange n'avait plus rien fait de bon, mais qu'ils avaient surtout développé les conséquences de leurs grandes découvertes.

Une autre question fort intéressante est celle de l'hérédité. Il y a eu des familles de mathématiciens, cela n'est pas douteux ; mais les enquêteurs reconnaissent qu'il est bien difficile de tirer des réponses qu'ils ont reçues quelque renseignement précis ; le fait d'avoir eu un fils, un cousin ou un neveu reçu, par exemple, à l'École Polytechnique constitue un document insuffisant ; l'aptitude à apprendre des Mathématiques est, à ce que je crois, assez commune ; et l'habileté des maîtres, des entraîneurs, est si grande, qu'ils font réussir aux concours des jeunes gens chez lesquels cette aptitude est fort médiocre. Quant à la faculté créatrice, que les concours n'ont pas la prétention de mettre en lumière, elle est trop rare pour qu'on puisse espérer recueillir beaucoup de faits probants. Sans compter que cette

faculté, là même où elle existe, ne se manifeste pas toujours : elle reste en puissance, elle ne passe pas à l'acte. Le milieu n'a pas été favorable ; les circonstances où elle se serait développée ne se sont pas produites. Il est certain que, dans notre système d'éducation, avec nos mœurs, le talent mathématique a moins de chance de se développer chez les femmes que chez les hommes, et cette simple remarque me semble enlever beaucoup de valeur aux observations d'après lesquelles ce talent viendrait, comme le voulait Möbius, du côté paternel. Les réponses à l'enquête sont, toutefois, favorables à cette opinion de Möbius.

Les questions relatives à la découverte, à la part du hasard, de l'inspiration, étaient assurément des plus intéressantes. M. Flournoy se plaint du laconisme des réponses. Il observe d'ailleurs que les mots *hasard*, *inspiration* sont fort élastiques, et cela explique « que le rôle du hasard puisse être jugé tantôt considérable, tantôt insignifiant ou même nul, selon qu'on pense au hasard des rencontres *extérieures* (conversations, lectures, etc.) ou au hasard *interne* du cours des idées, lequel naturellement n'est fortuit qu'en apparence et se ramène en réalité soit à l'effet du travail intérieur, soit au facteur imprévisible de l'inspiration ». Si laconiques qu'aient été les réponses, il est remarquable qu'elles s'accordent assez bien avec les conclusions que M. Poincaré a développées dans sa conférence à l'Institut psychologique : La découverte est toujours précédée par un grand effort de pensée qui souvent est long et paraît infructueux ; elle surgit parfois, comme une illumination soudaine, avec un carac-

tère de certitude qui trompe rarement, alors qu'on ne croit pas penser au problème posé; n'importe quand, à la promenade, pendant une lecture, une conversation, assez fréquemment au réveil. Il s'agit, bien entendu, non des résultats d'un calcul, mais d'une idée directrice, d'une méthode, d'un choix heureux, d'un rapprochement, d'une clef qui va sûrement ouvrir la porte devant laquelle on a épuisé ses efforts. Le travail conscient n'est pas fini; il reste à suivre l'idée, à en développer logiquement les conséquences. La réalité d'un travail inconscient, qui, chez quelques-uns, aboutit à la découverte, n'en est pas moins mise hors de doute. Les réponses négatives ne valent pas contre les observations positives d'un grand nombre de mathématiciens éminents, contre celle de M. Poincaré en particulier. Le travail inconscient peut très bien se produire chez ceux même qui n'ont jamais rien trouvé qu'en y pensant consciemment, puisque, aussi bien, le travail inconscient ne peut être observé directement. Beaucoup d'autres observations conduisent à affirmer ce travail; mais il est, à coup sûr, intéressant de le constater nettement dans la recherche mathématique et d'en connaître quelques conditions et quelques caractères, Dure-t-il longtemps? persiste-t-il? Intervient-il dans les cas, assez fréquents, où un mathématicien qui a abandonné le problème sur lequel il s'est vainement acharné, qui l'a presque oublié, reprend ce problème avec des forces nouvelles et en vient à bout? Est-il plus intense dans la jeunesse que dans l'âge mûr? Les enquêteurs voudraient sans doute en savoir bien davantage : ils ne sont pas les seuls. Bien étrange sont les pro-

longements et les dessous mystérieux de la pensée ; mais cette pensée est-elle moins étrange lorsqu'elle est pleinement consciente et n'a-t-elle plus de quoi s'étonner d'elle-même ?

Faut-il parler des rêves, sur lesquels M. Maillet avait déjà fait une enquête[1] ? La pauvreté intellectuelle des rêves est chose banale ; ils sont assurément plus riches en sensations : les sensations de tension, d'effort, de fatigue, de joie dont s'accompagne le travail intellectuel, son insuccès ou sa réussite, peuvent très bien y trouver place et se mélanger avec des impressions visuelles, calculs ou figures, d'un caractère mathématique. Mais il faut se défier, comme l'a montré M. Foucault, de la façon dont tout cela se déforme et s'organise au réveil et dans le souvenir.

Les excellents conseils aux jeunes gens ne manquent pas : écouter de bons professeurs, étudier les grands maîtres, ne lire que des chefs-d'œuvre, acquérir des connaissances dans les branches les plus diverses des Mathématiques ; prendre un sujet spécial le plus à son goût, et qui ne soit pas épuisé ; poursuivre quelque problème par ses propres forces ; ne pas faire de Mathématiques si l'on n'en est pas épris et si l'on ne veut pas se contenter de rester pauvre dans les biens de ce monde ; travailler sérieusement, publier peu ; ne pas trop écrire si l'on n'est pas Abel ou Galois ; ne pas négliger son devoir professionnel ; ne pas trop fumer ; avoir du génie ; pratiquer sur soi-même la règle de la division en moyenne et extrême raison.

1. *Bulletin de la Société philomatique*, 1906.

2. — L'Economie politique et les mathématiques[1].

Le Livre de M. Bouvier, professeur à la Faculté de droit de l'Université de Lyon, est un plaidoyer modéré et modeste en faveur de l'introduction des méthodes mathématiques en économie politique. L'auteur risque de passer pour un esprit singulier et dangereux. Comment! il fait attention à ce qui se dit dans cette Université de Lausanne, où M. Walras a enseigné, où M. Paréto enseigne à son tour, lui qui est professeur à Lyon, en France, et professeur de droit? Ignore-t-il que, dans notre pays, on ne peut « faire » son droit ou sa médecine qu'après des études purement littéraires? Serait-il capable de penser que, dans notre société moderne, les avocats et les juges peuvent avoir à traiter des affaires où les sciences interviennent, et des cas qui ne sont point prévus dans le *Digeste*? Est-il possible qu'il regrette de ne pas savoir les Mathématiques? En tout cas, c'est un homme infesté par l'esprit philosophique, qui parle de l'unité de la Science, du mutuel appui que ses diverses parties doivent se prêter, qui cite non seulement M. Boutroux, mais encore M. Poincaré, qui ne rejette pas ce qu'il ne connaît point, qui tâche même de s'en rendre compte, qui trouve des raisons pour réfuter les arguments de ceux qui ne veulent point entendre parler, en Économie politique, d'équations, d'inconnues, de courbes ou d'intégrales.

A vrai dire, ces arguments sont fort amusants.

1. Bouvier (E.). *La Méthode mathématique en économie politique.*

On soutient que les Mathématiques n'ont rien à faire ici, parce qu'il s'agit de phénomènes variables et non de constantes, ou bien parce que les Mathématiques sont une science exacte, et que les phénomènes économiques ne peuvent être connus qu'approximativement, ou encore parce qu'il est arrivé à quelques mathématiciens de se tromper, et que leur science est assurément inutile dès qu'elle n'est pas infaillible, ou enfin parce que les Mathématiques sont bien obscures pour ceux qui ne les savent pas. A la vérité cette dernière assertion est assez exacte. Mais, à la lecture de pareils arguments, un mathématicien ne peut s'empêcher de devenir modeste, en pensant à ce qu'il risquerait de dire s'il se mêlait de parler d'Économie politique. Un autre argument, sur lequel on peut s'arrêter un instant, est que les mathématiciens négligent volontiers ce qui les gêne : voici, par exemple, M. Walras, qui spécule sur un milieu économique qui est purement idéal. Le reproche vaudrait contre les conséquences de ces spéculations, si l'on prétendait les appliquer de suite à la réalité : il a à peu près la même portée que celui qu'on adresserait à un physicien, parce qu'il étudie la chute des corps dans le vide, et non dans l'air où ils sont plongés : il manifeste simplement l'ignorance de la méthode de ces sciences expérimentales, où l'on s'efforce d'isoler les causes, de les étudier dans des conditions simples, quitte à superposer au contraire leurs effets pour expliquer la réalité. M. Walras n'a sans doute pas la prétention d'avoir mis en formules toute l'Économie politique.

Que les Mathématiques puissent intervenir

utilement en Économie politique, soit pour élaborer les résultats de la statistique et ses tableaux de nombres, soit pour éclairer certains points de la théorie des échanges, c'est ce qui, théoriquement, n'est pas douteux. Au point de vue pratique, la complication des phénomènes sociaux constitue assurément une grande difficulté. La mise en équation des problèmes réels est toujours difficile. On y pense avec découragement tant qu'elle n'est pas réalisée, avec étonnement lorsque quelqu'un y a réussi. M. Walras s'est efforcé d'avoir toujours autant d'équations que d'inconnues : cela est fort bien; on peut regretter que, dans ses équations, il reste parfois plus d'une *fonction* inconnue; il ne faut pas le lui reprocher, ni en conclure que les Mathématiques n'ont rien à faire avec l'Économie politique. Les problèmes de la Météorologie sont des problèmes déterminés qui, en fin de compte, sont du ressort des Mathématiques : on est loin, à coup sûr, de posséder une formule qui permette la prévision du temps. Il n'est pas sûr que les phénomènes économiques soient plus simples que ceux de la Météorologie. Est-ce une raison pour ne pas étudier les données numériques de l'une ou l'autre science, et de tirer mathématiquement des lois que l'on connaît, ou des hypothèses qu'on peut faire, les conséquences qu'elles comportent? Assurément la possibilité de progrès importants dans cette voie, ne sera démontrée que par la réalisation même de ces progrès : est-ce une raison pour dédaigner et railler ceux qui s'y efforcent? M. Bouvier a raison : le dédain que l'on affecte pour un ordre de recherches est presque toujours la marque de l'incapacité où l'on

est d'entreprendre ces recherches et même de les comprendre, c'est un moyen court et facile de cacher aux autres et à soi-même cette incapacité; mieux vaudrait faire, tout simplement, ce dont on est capable. M. Bouvier termine son Livre en insistant sur la nécessité de donner aux jeunes gens une instruction générale : Eh! quoi? Il y a maintenant, dans notre pays, des gens qui parlent d'une « instruction générale » d'où les Sciences ne seraient pas exclues? Que cela est nouveau et audacieux!

3. — Un livre de M. Laisant [1].

M. Laisant présente son Livre de la façon la plus modeste. Il se défend de rien vouloir apprendre aux savants, et, bien qu'il traite de Philosophie, de connaître la langue des philosophes; il devrait dire, de quelques philosophes, car il a lu Leibnitz, Descartes, Pascal, d'Alembert, Diderot, Condorcet, Auguste Comte et il avoue qu'ils lui ont appris quelque chose. Ces gens-là étaient sans doute philosophes, et c'est l'être déjà que de se plaire dans leur commerce. Il est de ceux d'ailleurs qui souhaitent la réconciliation des Mathématiques et de la Philosophie, et ce désir est si vif chez lui, qu'il accuse les mathématiciens d'être les auteurs de la rupture; s'il en est ainsi, les philosophes auront le beau rôle en faisant les premiers pas. Quoi qu'il en soit, notre éminent collaborateur avait bien le droit d'inscrire le mot *Philosophie* dans le titre de son Livre; on fait de la Philosophie toutes les fois

1. LAISANT (C.). La Mathématique. *Philosophie, Enseignement.*

que l'on remue des idées générales, et que l'on donne à penser. Est-ce parce qu'il écrit clairement et dit nettement ce qu'il pense, qu'il a cru devoir s'excuser de son sous-titre ! Je ne le soupçonne pas de cette ironie, et cependant il est vrai que le talent de trouver obscur ce que d'autres trouvent clair est une partie de l'esprit philosophique.

Son Livre est divisé en trois Parties : *la Mathématique pure, la Mathématique appliquée, l'Enseignement.*

Tout en reprenant cette vieille forme « *la Mathématique* » qui marque mieux l'unité de la Science, M. Laisant reconnaît avec raison qu'il est impossible de définir cette Science, de faire tenir tout ce qu'elle contient dans une courte phrase qui soit intelligible : c'est en l'étudiant qu'on apprendra ce qu'elle est. Il en affirme énergiquement l'origine expérimentale : « Sans la présence du monde extérieur, aucune connaissance mathématique n'aurait jamais pu pénétrer dans le cerveau de l'homme ». Il y aurait bien à dire sur ce point, et je regrette que l'auteur se soit borné à une affirmation. Tout d'abord, une condition nécessaire n'est pas forcément une origine ; puis, si l'expérience est nécessaire à la constitution des Mathématiques, quelle expérience est-elle nécessaire ? Est-ce bien l'expérience du monde extérieur ? Veut-on dire qu'il n'y a pas d'autre expérience ? Ce ne serait pas le lieu de discuter ici cette affirmation ; mais tout changement dans la pensée n'est-il pas une expérience, d'où il est possible de faire sortir la notion de nombre ? Cette notion suppose-t-elle autre chose que *le divers et l'unité*, que la faculté de

séparer et de réunir qui est le fond même de notre intelligence? Un peu plus loin, M. Laisant dira : « ... A la réalité des choses, nous substituons des êtres de raison, créés par notre cerveau, sur lesquels le raisonnement et les procédés mathématiques pourront librement s'exercer. » N'est-ce pas ces êtres-là qui sont le véritable objet de la Mathématique pure? C'est bien notre cerveau, ou mieux notre raison, qui les a créés, et cette création mérite d'être étudiée par les philosophes. Elle comporte peut-être un peu plus que l'abstraction, que l'oubli des complications phénoménales, puisque les idées qui en résultent sont, par leur perfection et leur pureté absolues, infiniment éloignées des images confuses qui les ont suscitées. Ces idées, il importe de les préciser, de les distinguer, de distinguer surtout les parties de la Science où elles interviennent, et de n'introduire que celles qui sont nécessaires : autrement, on cache le véritable caractère des faits mathématiques, et, en introduisant dans leur démonstration des éléments qui ne sont pas dans la nature des choses, on la complique, et l'on risque, en outre, de masquer l'identité de propositions qui se retrouvent les mêmes, avec des mots différents, dans des Chapitres différents de la Science. M. Laisant en donne, à propos de la Mécanique, un exemple excellent, quand il observe que l'idée de force n'intervient pas dans ce Chapitre de la théorie des vecteurs qui constitue la plus grosse partie de la Statique du corps solide, au sens de Poinsot; cette même théorie se retrouve mot pour mot dans la Cinématique, quand on étudie la composition des rotations. Il y a donc intérêt à la séparer, comme il le pro-

pose avec raison, de la Statique ou de la Cinématique, et d'en faire un Chapitre de Géométrie, auquel on se référera, quand on en aura besoin. Il y a intérêt aussi à constituer à part une *Géométrie des masses*, où n'intervient pas le sens physique de la masse, du nombre que fournit la balance, mais où la masse n'est qu'un coefficient numérique qui affecte des éléments purement géométriques. Il est vrai aussi que la Cinématique n'est qu'un Chapitre de la Géométrie, où le caractère réel du temps n'importe nullement, où ce temps est une variable quelconque, et où l'on conservera, si l'on veut, les mots *vitesse* et *accélération*, à moins qu'on ne préfère dire *dérivée géométrique*. Ces éléments interviennent d'une façon nécessaire, quand on traite de la tangente et de la courbure, et, à vrai dire, la Cinématique n'est qu'une partie de ce qu'on appelle habituellement les Applications géométriques du Calcul différentiel. Tous ces Chapitres divers de la Géométrie, doivent, comme le demande M. Laisant, être enseignés avant la Dynamique et la Statique proprement dites, où interviennent ces postulats expérimentaux que l'on désigne d'habitude sous le nom de *lois de Newton* et, sur ce point, M. Laisant trouvera moins de contradicteurs que, peut-être, il ne se l'imagine. C'est bien ainsi que la Science s'organise, suivant les éléments essentiels qu'elle met en jeu ; une partie de la Science n'est réellement constituée que lorsqu'elle a éliminé les éléments qui ne lui sont pas nécessaires, et qui cependant ont contribué à sa formation. Si cela est vrai, n'est-il pas légitime de vouloir fonder la Science du nombre, c'est-à-dire toute l'Algèbre et toute l'Analyse sur la pure notion de

nombre, même de nombre entier? Il semble que M. Laisant, si je l'ai bien compris, voie dans une pareille tentative, comme une atteinte à la *foi*, dont il prend chaudement la défense. De quelle foi parle-t-il, et à quelle inquisition veut-il livrer ses confrères? Dans la Science, la foi n'est peut-être qu'un oreiller, plus commode que le scepticisme. Mais M. Laisant a raison s'il veut dire que les diverses parties des Mathématiques s'éclairent mutuellement, que le même fait mathématique qui apparaît ici entouré d'un lourd appareil logique, revêt là une clarté intuitive et que la puissance d'intuition, plus encore que la puissance logique, est la partie vraiment belle et essentielle de l'esprit mathématique. Encore faut-il faire quelques réserves ; la clarté même de l'intuition empêche souvent de distinguer des choses qu'il faut cependant distinguer; la minutieuse logique y sert, c'est un rôle modeste, mais légitime. Et il se peut aussi que la facilité plus ou moins grande qu'offre une méthode ou une autre pour aborder une question mathématique soit purement subjective et comme un résultat d'habitudes contingentes de l'esprit. Il se peut que, bien employées, ces méthodes se valent toutes [1] et qu'elles se heurtent aux mêmes difficultés, qui sont dans la nature des choses et qui sont seulement revêtues de formes verbales différentes. Parfois des modes d'exposition, qui semblent très divers, sont, au fond, identiques, ou plutôt se correspondent exactement, dans toutes leurs parties. Cela est manifeste dans certaines

1. J'ai entendu M. Raffy développer ingénieusement ce paradoxe, qui me semble contenir une grande part de vérité.

démonstrations géométriques et analytiques, qui se recouvrent entièrement, en employant un symbolisme différent, et dont l'identité même semble marquer la perfection définitive ; de deux expositions dont l'une est plus simple, l'autre plus compliquée, l'une est sans doute imparfaite, et c'est quelquefois la première, dont la simplicité n'est qu'apparente, et dont on s'aperçoit par les lacunes.

Dans une centaine de pages, M. Laisant passe en revue les diverses branches de la Mathématique pure, en les rangeant dans leur ordre de complexité croissante ; cette revue est forcément un peu rapide, et, sans le talent de l'auteur, sans la verve qui l'anime, elle serait un peu sèche ; mais il trouve le moyen de toucher à la plupart des points essentiels.

Pour le *nombre*, l'auteur emprunte à M. H. Laurent la définition suivante : « On appelle *nombre* une locution et un signe qui servent à désigner avec précision une quantité et toutes celles qui lui sont égales, de manière à les distinguer nettement de toutes celles qui sont différentes. » Sans critiquer cette définition, ni marquer les termes qui, comme *quantité* et *égalité*, auraient grand besoin d'explication, je me demande si une définition générale du nombre est plus utile qu'une définition de la Mathématique et si les définitions de ce genre ne sont pas de ces ingénieuses devises, fort difficiles à trouver et à comprendre, qui disent trop de choses en trop peu de mots. La vraie définition du nombre est la synthèse des définitions des diverses espèces de nombres, et, ce qui importe, c'est que ces définitions particulières soient

claires, M. Laisant raconte qu'il a trouvé un mathématicien qui se demandait si $\sqrt{2}$ existe ; il a raison de se moquer de ce mathématicien-là : il ne s'agit pas de savoir si $\sqrt{2}$ existe, il s'agit d'avoir une idée claire de $\sqrt{2}$, et ce n'est pas non plus en disant que $\sqrt{2}$ existe qu'on en a une idée claire.

M. Laisant emprunte à Auguste Comte la définition de l'Algèbre ; c'est, d'après lui, le calcul des fonctions. Cette définition me semble beaucoup trop vaste. On l'a dit, il y a longtemps, l'objet propre de l'Algèbre, c'est le polynome, la fonction entière. La théorie des équations est l'étude des valeurs particulières des variables qui annulent le polynome, ou l'étude des fonctions inverses des fonctions entières. Au reste, M. Laisant ne s'est nullement trompé sur le caractère particulier des fonctions qu'étudie l'Algèbre, puisque, après avoir donné d'intéressantes indications sur l'objet du Calcul infinitésimal, il a consacré un Chapitre de son Livre à la théorie des fonctions définies par les équations différentielles, théorie à propos de laquelle il expose, d'après M. Painlevé, la conception moderne de l'intégration d'une équation différentielle.

A propos de la Géométrie, M. Laisant s'élève contre l'appareil suranné d'Euclide. On sait assez que les avis sont partagés ; il reste encore beaucoup d'excellents géomètres qui admirent la perfection logique de cet appareil et qui estiment que son étude est une excellente discipline pour les commençants, et il est vrai que, dans les pays dont les écoles gémissent sous la tyrannie d'Euclide, on ne voit pas que la Géométrie moderne

soit négligée. Tout en respectant des divisions consacrées, et qui ont l'avantage de bien se fixer dans la mémoire, il est cependant légitime de montrer le lien qui fait une théorie d'un faisceau de théorèmes, et d'orienter la Géométrie dite *élémentaire* vers la science moderne, en y faisant pénétrer, comme le demande M. Laisant, l'idée de la transformation des figures; mais il me semble que cette orientation se produit toute seule et qu'elle se manifeste suffisamment dans les livres qui paraissent. Faut-il aller plus loin ? Cela n'est pas défendu : je ne crois pas, par exemple, que les idées profondes développées par M. Klein dans son *Programme d'Erlangen*, soient inconnues dans notre pays et il se peut qu'elles aient eu sur l'enseignement de quelque modeste professeur une influence discrète.

Je me trouve avoir déjà parlé de quelques-unes des idées de M. Laisant sur la Mécanique rationnelle.

Ses observations sur les applications sont intéressantes : il distingue trois degrés dans tout problème de Philosophie naturelle : le passage du concret à l'abstrait, qui substitue à la réalité les êtres de raison des mathématiciens : c'est, en gros, la mise en équations ; puis, la résolution mathématique du problème ; enfin, le passage de l'abstrait au concret, qui comporte essentiellement, comme le fait remarquer l'auteur, une discussion approfondie de l'approximation sur laquelle on peut compter, des limites entre lesquelles sont comprises les erreurs de la solution, inévitables à cause des erreurs que comportent les données. On ne saurait répéter trop souvent, semble-t-il, que les Mathématiques ne peuvent

transformer des données approchées qu'en résultats approchés, et qu'il convient de conformer l'exactitude des calculs à celles des données. M. Laisant passe rapidement en revue les principales applications du calcul, du dessin géométrique, de la Mécanique.

C'est avec une grande chaleur que M. Laisant parle de l'enseignement : on sent vraiment, dans cette partie de son Livre, le maître qui aime la Science : seulement, je ne puis m'empêcher de penser que bien des professeurs en le lisant, avec l'attention qu'il mérite, se diront plus d'une fois : « Mais on nous reproche de ne pas faire précisément ce que nous faisons, de ne pas introduire dans la Science les méthodes que nous enseignons. » Je suis persuadé que si M. Laisant était chargé d'une inspection générale, il ne changerait rien à ses idées, dont la plupart sont excellentes, mais qu'il modifierait la manière de les exprimer. Bien entendu, sur ses idées mêmes, j'aurais quelques réserves à indiquer, par exemple sur l'utilité (très douteuse à mon sens) de l'introduction des imaginaires dans l'enseignement élémentaire, ou de la notation différentielle dans la classe de Mathématiques spéciales; si je crois, comme M. Laisant, qu'il est à la fois utile et commode d'introduire, comme on le fait, de plus en plus, les éléments du calcul des vecteurs, je serais un peu plus sceptique à l'égard des quaternions ; mais, pour ce qui est des quaternions, un peu de partialité lui est sans doute permise. Il me semble aussi que l'amusante sortie à laquelle il se livre contre la Trigonométrie n'est pas bien justifiée : ce que l'on enseigne sous ce nom, c'est, d'une part, un Chapitre de l'applica-

tion de l'Algèbre à la Géométrie, et dans ce Chapitre, la théorie des projections a sa place marquée, d'autre part, le principe de la théorie des fonctions circulaires. C'est, à coup sûr, deux des plus beaux Chapitres de la Science élémentaire, et s'ils fournissent l'occasion d'applications numériques, il ne faut pas s'en plaindre. Quoi qu'il en soit, j'espère que les lecteurs de M. Laisant ne prendront pas pour de la mauvaise humeur ce qui, sans doute, n'est que de la verve.

Assurément, notre enseignement mathématique est loin d'être parfait et je souhaite que le livre de M. Laisant contribue à l'améliorer; l'auteur a raison quand il se plaint de la façon dont on néglige le calcul numérique, des classes trop rares et surtout trop espacées; ce sont des défauts qu'il n'est pas impossible de corriger; dans les parties élevées, c'est surtout de la préparation hâtive aux concours que vient le mal et, malheureusement, je ne connais, pas plus que M. Laisant, de remède à ce mal nécessaire.

4. — Sur la définition des unités dérivées.

Les observations qui suivent se sont probablement présentées à l'esprit de ces maîtres, fort nombreux, qui se plaisent à réfléchir sur ce qu'ils enseignent; j'avoue que je ne les ai faites que tout récemment, et c'est ce qui m'engage à les publier.

Je copie la définition classique dans l'*Annuaire du Bureau des Longitudes* (1907, p. 626) :

« L'unité de vitesse est la *vitesse* uniforme d'un centimètre par seconde. »

Je ne m'arrête pas à la forme elliptique donnée à cette définition, mais seulement à ce que le mot *vitesse* figure dans la définition de l'unité de vitesse : il n'y a rien à redire à cela ; pour définir l'unité de vitesse, il faut savoir ce que c'est qu'une vitesse ; mais il est assurément légitime de remplacer le mot *vitesse* par sa définition. Adoptons la suivante :

La vitesse, dans un mouvement uniforme, est le nombre qui mesure la longueur parcourue par le mobile pendant l'unité de temps.

Si l'on prend le centimètre pour unité de longueur, la seconde pour unité de temps, la *vitesse* dont il s'agit dans la définition de l'*Annuaire* est le nombre un, et nous arrivons à la définition suivante :

Dans le système C. G. S., l'unité de vitesse est le nombre un. Ce n'est assurément pas ce qu'ont voulu dire les auteurs de ce système.

Des observations pareilles s'appliquent aux définitions de l'unité d'accélération, de la dyne, de l'erg, etc... Je reviendrai tout à l'heure sur l'erg. Ces diverses définitions supposent que l'on sache ce que c'est qu'une accélération, qu'une masse, qu'un travail... Les mathématiciens définissent l'accélération, la masse, le travail, comme des nombres qu'ils apprennent à déterminer ; si l'on substitue les définitions mathématiques usuelles des mots accélération, masse, travail, à la place de ces mots dans les définitions de l'*Annuaire*, on parvient aux résultats suivants :

L'unité d'accélération est le nombre un ;

La dyne est le nombre un ;

L'erg est le nombre un.

J'ai tenu à commencer par la vitesse : c'est le cas le plus simple, et l'on peut s'en tirer. Dans le mouvement uniforme, en effet, on sait ce qu'on dit quand on dit que deux mobiles ont la même vitesse, que l'un a une vitesse double, triple... de l'autre, et cela indépendamment de la définition que j'ai choisie : il sera donc légitime de parler du rapport de deux vitesses, et la définition de l'*Annuaire* est acceptable.

On notera qu'une difficulté du même genre se présenterait en géométrie si l'on disait :

L'unité de surface est la surface du centimètre carré. Une pareille définition suppose qu'on sache ce qu'est une surface : au moins en a-t-on quelque idée. Quand on parle d'une surface, il y a une figure, qui est bien quelque chose ; sans doute, si l'on veut préciser, on rencontre des difficultés ; mais je ne veux pas y insister ici. Le point essentiel est celui-ci :

En parlant de la vitesse, de l'accélération, du travail... les savants qui ont formulé les principes du système C. G. S., n'avaient pas en vue les définitions mathématiques de la vitesse, de l'accélération, du travail... définitions qui aboutissent à des *nombres;* ils avaient en vue certaines grandeurs concrètes, de même que le mathématicien qui parle d'une surface, sans expliquer comment on l'évalue.

Il n'y a là rien qui doive étonner, puisque ces savants étaient des physiciens. Parlez du *travail* à un physicien : il voit une machine qui élève de l'eau, qui perce ou découpe une pièce de métal, qui réduit une matière dure en poussière. Pour lui, le travail c'est la besogne que fait cette machine. M. J. Perrin, qui est aussi bon philosophe

qu'il est bon physicien, se plaît à répéter : « Le travail, c'est ce qui se paie ». Un mathématicien à qui je citais cette phrase m'a répondu : « Alors, l'unité de travail, c'est le franc ». Un ouvrier comprendra très bien.

Je viens de m'occuper du travail, qui est une notion relativement compliquée ; mais parlez de vitesse à un physicien : il verra sûrement un mobile réel qui file le long de sa trajectoire ; il verra aussi cette vitesse s'accélérer... tous les mots vitesse, accélération, travail... éveilleront chez lui des images concrètes.

Assurément, le professeur de mathématiques ne doit pas laisser l'usage exclusif de ces images concrètes à son collègue de physique : lui aussi doit les éveiller chez ses élèves, insister sur la réalité d'où ont été tirées les abstractions dont il parle : c'est cette réalité qui fait le prix de ces abstractions ; mais il aura beau faire tout son possible pour ne pas tomber dans ce verbalisme qu'on lui a quelquefois reproché avec raison, il faut bien que le pauvre homme fasse son métier, qui est d'arriver à des formules précises, dont on puisse se servir sans se tromper. Quand il voudra préciser et expliquer ce qu'est un erg à des enfants qui ne le savent pas, les images du physicien ne lui serviront de rien : il ne peut point accepter et répéter, telles quelles, les définitions classiques des auteurs du système C. G. S., telles que l'*Annuaire* les reproduit. Que dira-t-il ?

Sur les unités de vitesse et d'accélération, je crois qu'il pourra ne rien dire du tout, puisque, aussi bien, on n'a pas donné de noms à ces unités. Arrivons à la masse et à la force.

Je pourrais bien ne pas parler de la masse,

puisque c'est une unité fondamentale, et non une unité dérivée ; mais je ne vois aucun inconvénient à ce qu'on définisse la masse d'un corps en décrivant la façon dont on fait une pesée (une double pesée si l'on veut), au moyen d'une balance : si l'on équilibre avec des grammes, on dira que la masse est exprimée en grammes, ou encore qu'on a pris le gramme pour unité de masse : c'est la même chose.

Quant au *gramme*, il ne me gênerait nullement que les élèves pensassent aux petits cylindres de cuivre que l'on sait, mais il est bien entendu que, pour satisfaire tout le monde, on parlera du morceau de platine iridié, etc... en n'oubliant pas, si l'on veut être « dans le train », de dire que ce morceau de platine iridié est déposé au pavillon de Bellevue, et non aux Archives.

Je sais bien qu'on criera au cercle vicieux ; que la théorie de la balance suppose les notions fondamentales de la mécanique, etc... Il sera temps de répondre quand on aura expliqué le moyen d'enseigner les choses expérimentales sans partir du « donné expérimental » : aucune finesse de langage n'y suffira. Je renvoie là-dessus à la phrase célèbre de M. Poincaré : « La masse est un coefficient numérique qu'il est commode d'attacher à la matière ». Encore se trouvera-t-il peut-être quelque enragé mathématicien pour demander ce qu'est la matière.

La force est un vieux résidu de métaphysique et d'anthropomorphisme ; c'est entendu. Il faut bien en parler ; d'après le programme de nos lycées, on doit admettre « qu'une force appliquée à un point matériel est égale géométrique-

ment au produit de la masse du point par l'accélération qu'elle lui imprime ». « Géométriquement égale » veut dire sans doute qu'on doit se représenter la force et l'accélération comme des vecteurs; tel est bien mon avis, mais puisqu'il s'agit ici de nombres, regardons l'une et l'autre comme des nombres. Le passage est facile.

On décrira donc les opérations à faire pour évaluer une force, en prenant pour unités de longueur, de masse et de temps les unités fondamentales C. G. S., et l'on ajoutera : pour rappeler que les longueurs, les masses et le temps ont été évalués en centimètres, grammes, secondes, l'habitude est de placer le mot *dyne* après le nombre trouvé : quand le mot dyne suit un nombre, c'est que ce nombre se rapporte à une force, et que les longueurs, les masses et les temps ont été évalués dans le système C. G. S. Voilà ce qu'on entend en disant que la dyne est l'unité de force C. G. S.

De même pour le travail et pour l'erg. On décrira les calculs à faire pour évaluer un travail, en prenant pour unités fondamentales les unités C. G. S. : pour rappeler que le calcul a été fait en prenant ces unités, l'habitude est de placer le mot *erg* au bout du nombre trouvé.

Et puis il faut être franc, expliquer les phrases que les élèves trouveront dans leurs livres, en particulier dans l'*Annuaire du Bureau des Longitudes*, qu'il faut leur vanter comme le meilleur et le plus distingué des almanachs, un almanach dont la lecture n'est nullement pernicieuse.

S'il s'agit d'une somme d'argent, et qu'on place le mot francs ensuite, si l'on dit que tel nombre

exprime des francs, tout le monde comprend. S'il s'agit de l'évaluation d'un travail, on dit que le nombre trouvé exprime des ergs. On pourrait sans doute rejeter cette expression, ou soutenir, comme plus haut, qu'elle ne signifie rien, sinon que les unités fondamentales sont les unités C. G. S. La vérité est que le travail est une notion très importante, parce qu'elle répond à une réalité physique qu'on fera sentir avec les exemples du physicien, et une réalité qu'on paye. Le travail est quelque chose en dehors des règles pour l'évaluer; ce quelque chose se précise par ces règles, par le nombre qui en résulte. Si l'on admet cela, l'erg est le travail qui, dans le système C. G. S., est mesuré par le nombre 1.

Et l'on dira de même que la vitesse, que l'accélération sont quelque chose, que l'on fera sentir, et que l'unité de vitesse, par exemple, dans le système C. G. S., est la vitesse mesurée par le nombre 1.



CHAPITRE XIV

ÉVARISTE GALOIS

Discours prononcé à Bourg-la-Reine [1]

Messieurs,

Quand le génie des savants qu'on veut exalter ne s'est pas manifesté par des bienfaits que tous ressentent, les honneurs rendus à leur mémoire prennent une signification presque religieuse : ces honneurs sont comme un acte de foi qui s'élève vers une science idéale à laquelle nous rendons hommage sans la connaître.

Évariste Galois a consacré quelques semaines de sa vie brève et tourmentée aux problèmes les plus abstraits de la plus abstraite des sciences. Ses prodigieuses découvertes sont aussi éloignées des applications qu'il est possible. En les honorant, Messieurs, vous proclamez l'unité de la Science et la liberté du savant.

Connaître le monde où nous vivons, voilà, dit-on, le but de la Science. Mais nous ne connaissons vraiment les phénomènes naturels que lorsque nous possédons les lois numériques aux-

1. La municipalité de Bourg-la-Reine a fait placer une plaque sur la maison où est né Évariste Galois : la première initiative de cet hommage vient de M. Matruchot, professeur adjoint à la Faculté des Sciences, qui habite Bourg-la-Reine. M. le colonel Caudelot, maire de cette ville, avait prié M. Tannery de prendre la parole à la cérémonie d'inauguration, qui a eu lieu le 13 juin 1909, sous la présidence de M. de Selves, préfet de la Seine.

quelles ils obéissent. Pour tirer parti de ces lois, pour savoir celles qui se déduisent des autres, pour leur substituer des lois plus générales ou plus simples, il faut connaître les propriétés des nombres. C'est tout un monde nouveau à étudier, un monde abstrait, décoloré, obscur. Ceux qui savent y pénétrer, l'éclairer et s'y diriger se passionnent pour les perspectives lointaines qu'ils y découvrent : le souvenir des paysages merveilleux et transparents qu'ils nous décrivent se présente parfois à la pensée du physicien et lui fait comprendre le monde réel auquel il s'attache ; grâce à un rapprochement inattendu, le physicien peut enfin relier les faits qu'il a observés, les mettre à leur vraie place, et construire une théorie qui les dépasse infiniment. Les théories physiques dominent la Chimie, la Physiologie, la Médecine. Toutes les sciences se mêlent, s'enchevêtrent, se nourrissent et vivent de la même sève. Telle vérité mathématique abstraite contribuera un jour, on ne sait comment, à cette maîtrise du monde que la Science nous procure peu à peu. Messieurs, vous avez senti cette unité de la Science ; vous savez que la vérité veut être recherchée pour elle-même, et que c'est seulement quand on l'a trouvée qu'apparaissent les applications qu'on peut en faire. Vous avez compris qu'on doit laisser au savant une entière liberté de pensée, une entière liberté de chercher ce qu'il espère trouver ; vous avez compris que nous ne devons pas nous étonner des voies qu'il suit, qu'il faut nous résigner à ne pas distinguer le but mystérieux qu'il entrevoit et qui l'attire.

C'est pourquoi vous honorez Galois et vous auriez raison de l'honorer si même vous pensiez

que la science ne se justifie que par son utilité pratique.

Il est né dans cette maison, voici bientôt un siècle. Son père, Gabriel Galois, a été un de vos prédécesseurs, Monsieur le Maire; il a donné, dans des temps difficiles, l'exemple de la fidélité aux idées libérales; il est mort, victime des cabales et des calomnies. Sa mère, née Demante, très intelligente et très bonne, portait un nom qui est bien connu à la Faculté de Droit : quelques-uns de ceux qui assistent à cette cérémonie se la rappellent peut-être; elle s'est éteinte en 1872, à quatre-vingt-quatre ans. Évariste Galois a grandi ici, il y a joué, il a été un enfant heureux; c'est peut-être ici seulement qu'il a goûté la joie et qu'il l'a répandue autour de lui.

Bien vite, au lycée Louis-le-Grand, il devient triste, difficile et singulier : son génie s'est emparé de lui; il est partagé entre deux passions : les Mathématiques d'abord; il lit, d'un bout à l'autre, comme pour se distraire, la *Géométrie* de Legendre; il la sait dès qu'il l'a lue; l'Algèbre l'attire encore davantage, mais les Traités élémentaires le rebutent; il apprend l'Algèbre dans les œuvres de Lagrange; à seize ans, il est mûr pour la découverte. Son autre passion, c'est un amour mystique et violent pour la République, pour une République plus idéale peut-être que ses mathématiques et plus éloignée de la réalité, pour une République à laquelle il rêve de se sacrifier, à laquelle au besoin il sacrifierait les autres : les créations de Victor Hugo ne sont pas de pures fictions; Marius et Enjolras sont les frères d'Évariste Galois.

Au sortir de sa Rhétorique, qu'il a mélangée à

la classe de Mathématiques préparatoires, il se présente à l'École polytechnique à laquelle il a cru pouvoir se préparer tout seul. Il est refusé. Première déception ; les déceptions ne lui seront pas ménagées. Il entre dans la classe de Mathématiques spéciales, où il trouve un maître admirable, M. Richard, qui le comprend pleinement, qui le juge ce qu'il est. Il a dix-sept ans ; c'est à cette époque que remontent ses premières publications mathématiques. Il adresse un Mémoire à l'Académie des Sciences sur la théorie des équations algébriques ; Cauchy l'égare. A la fin de l'année scolaire, il est encore refusé à l'École polytechnique. Ce second échec, il ne le pardonnera pas aux examinateurs : ce n'était pas seulement une blessure à son orgueil, ou plutôt au juste sentiment de ce qu'il valait ; Galois a vraiment souffert de ne pas entrer dans l'illustre Maison, qu'il aimait pour sa gloire scientifique et pour l'esprit libéral de ses élèves.

Désespéré, il se retourne vers l'École normale ; il y entre en octobre 1829. Il publie trois Mémoires au commencement de 1830 : il est alors en possession d'une bonne partie de ses grandes découvertes ; au mois de janvier, il présente l'ensemble de ses recherches sur l'Algèbre à l'Académie des Sciences. Fourier, le secrétaire perpétuel, emporte le manuscrit ; il meurt dans l'année ; le manuscrit ne se retrouve point. Un an après, Galois envoyait à l'Académie son Mémoire sur les conditions de résolubilité des équations par radiaux ; les mathématiciens qui devaient l'examiner ne se donnèrent pas la peine qu'exigeait le style trop concis de Galois : ce Mémoire, qui est l'un de ses principaux titres de

gloire, ne fut pas compris et fut qualifié d'incompréhensible. Galois confondit dès lors dans la même haine et le même mépris les membres de l'Académie des Sciences et les examinateurs de l'École polytechnique.

Revenons à l'année 1830 et à cette École normale où Galois continuait de regretter l'École polytechnique : pendant les trois journées de juillet, le directeur de l'École parvint à tenir les élèves sous clef, même le 29 qui était un jeudi, un jour de sortie. Je crois bien que les parents lui en surent gré, mais on devine la fureur de Galois quand il apprit la part qu'avaient prise à la révolution les élèves de l'École polytechnique et d'autres étudiants, alors qu'il était enfermé avec ses camarades. Le directeur de l'École normale alla rejoindre les membres de l'Académie des Sciences et les examinateurs d'entrée à l'École polytechnique. Au mois de décembre, Galois écrivit dans un journal une lettre où il ne le ménageait pas. La lettre était signée *Un élève de l'Ecole normale ;* mais il n'était pas difficile d'en découvrir l'auteur, qui fut mis à la porte.

Galois se jeta en pleine mêlée politique. Il est poursuivi et incarcéré en mai 1831 après un banquet aux *Vendanges de Bourgogne*, où il avait prononcé un toast dont les tendances régicides ne peuvent pas être niées : il n'avait pas dix-neuf ans, le jury l'acquitta malgré l'impertinence de ses réponses au président.

Le 14 juillet de la même année, le voici à la tête d'une manifestation républicaine, habillé en artilleur de la garde nationale, armé d'une carabine, de pistolets et d'un poignard. Arrêté sur le Pont-Neuf, condamné à six mois de prison,

écroué à Sainte-Pélagie le 17 décembre, il est jeté parmi la foule des prisonniers politiques ramassés dans les émeutes qui bouleversaient Paris depuis un an. Ces gens-là, qui se qualifiaient de *patriotes*, sont faits pour étonner nos révolutionnaires d'aujourd'hui. J'emprunte à M. Paul Dupuy le récit de la scène qui se passait tous les soirs, avant le coucher :

« Les prisonniers se réunissaient pour chanter en chœur des chansons patriotiques et terminaient par la *Marseillaise*. Au couplet *Amour sacré de la Patrie*, tout le monde s'agenouillait ; puis du haut des fenêtres grillées, les jeunes détenus, ceux qu'on appelait *les mômes*, gamins abandonnés ou vagabonds qui partageaient le quartier des politiques, suspendus en grappes aux barreaux, entonnaient à leur tour la strophe des enfants : elle paraissait tomber du ciel.

. . . .

« Quand les voix claires des enfants s'étaient tues, les hommes défilaient devant le drapeau et le baisaient avant de remonter. »

Malgré la grandeur des sentiments qui animaient la plupart d'entre eux, ces prisonniers formaient une foule assez mêlée, où les gens de mœurs grossières ne pouvaient manquer.

Plusieurs d'entre vous, Messieurs, ont vu le charmant portrait, dont Mme Guinard, la nièce de Galois, a bien voulu autoriser la reproduction.

Cet enfant aux traits fins et distingués, aux yeux profonds, au front puissant, à la bouche mélancolique et dédaigneuse, imaginez-le qui se promène de long en large au milieu des vieux habitués des barricades. Il agite dans sa tête les plus hautes questions mathématiques ; la chaîne

merveilleuse des conséquences logiques se déroule devant lui; ou bien il réfléchit sur la façon dont les vérités nouvelles se découvrent, dont elles viennent à briller au milieu des vérités déjà connues d'où elles émergent; ou, peut-être, il esquisse le plan magnifique d'une cité future, où régnera la justice. Ses camarades de prison s'étonnent, l'interpellent, se moquent de lui parce qu'il n'a pas le courage de boire : un jour, par bravade, il avala toute une bouteille d'eau-de-vie. Raspail, dans ses *Lettres sur les Prisons de Paris*, nous a laissé le tableau de cette horrible scène et de bien d'autres qui altérèrent la santé de Galois. Pourtant, on eut de la bienveillance pour lui; le 16 mars, on l'envoya dans une maison de santé, où il fut prisonnier sur parole. Un amour pour une femme qu'il traitera bientôt d'infâme coquette, le prend tout entier pendant quelques semaines. Cette passion, voici comment il la juge lui-même :

« Comment se consoler d'avoir épuisé en un mois la plus belle source de bonheur qui soit dans l'homme, de l'avoir épuisée sans bonheur, sans espoir, sûr qu'on est de l'avoir mise à sec pour la vie? »

A propos de cette *infâme coquette*, on ne sait ni pourquoi, ni contre qui, il se bat en duel le 30 mai; il est blessé mortellement, il meurt le 31 mai 1832, à 10 heures.

Il avait, paraît-il, fait ce qu'il avait pu pour éviter ce duel; en l'acceptant, il a la certitude d'être tué; il passe le jour et la nuit qui précèdent le duel à revoir son grand Mémoire sur les équations résolubles, à rédiger son testament scientifique, cette extraordinaire lettre à Au-

guste Chevalier où se montre toute sa science, où éclate tout son génie. Quelle nuit tragique, Messieurs, que cette nuit-là, où l'enfant de génie, qui sait que la lumière qu'il porte va s'éteindre, voit passer devant lui ce qu'il a fait, ce qu'il aurait pu faire, où, en s'efforçant de fixer les résultats les plus essentiels, il écrit d'une main fébrile : *Je n'ai pas le temps.*

Quinze ans plus tard, en 1846, Joseph Liouville publiait dans son journal les *Œuvres mathématiques de Galois:* cette publication a été faite avec autant d'intelligence que de conscience; Liouville a publié tout ce qu'il importait de publier; ses papiers témoignent du travail considérable qu'il s'est imposé pour pénétrer la pensée de Galois; ces œuvres ont été réimprimées en 1897 par les soins de la Société mathématique, avec une très belle préface due à M. Émile Picard. Il y a trois ans, Mme de Blignières, une des filles de Liouville, a su retrouver les manuscrits de Galois dans les papiers de son père : elle les a légués à l'Académie des Sciences. Ces feuilles jaunies, déchirées, maculées, couvertes de griffonnages, les calculs inachevés, les fragments venus de Sainte-Pélagie qui sentent la haine et la fièvre, la lettre écrite dans la nuit funèbre, le glorieux Mémoire qui fut jugé incompréhensible, les injures à ses membres d'il y a quatre-vingts ans, l'Académie a recueilli tout cela pieusement, comme une inestimable relique; et aujourd'hui, Messieurs, son Secrétaire perpétuel[1] est au milieu de vous; il s'unit à vous pour honorer Galois.

1. M. Darboux assistait à la cérémonie.

Depuis la publication de Liouville, d'année en année, l'importance de l'œuvre de Galois est apparue plus clairement ; les plus grands mathématiciens se sont plu à la proclamer. Ce n'est pas ici le lieu et ce n'est pas à moi qu'il appartiendrait de dire l'influence considérable qu'elle a eue sur le progrès des Mathématiques.

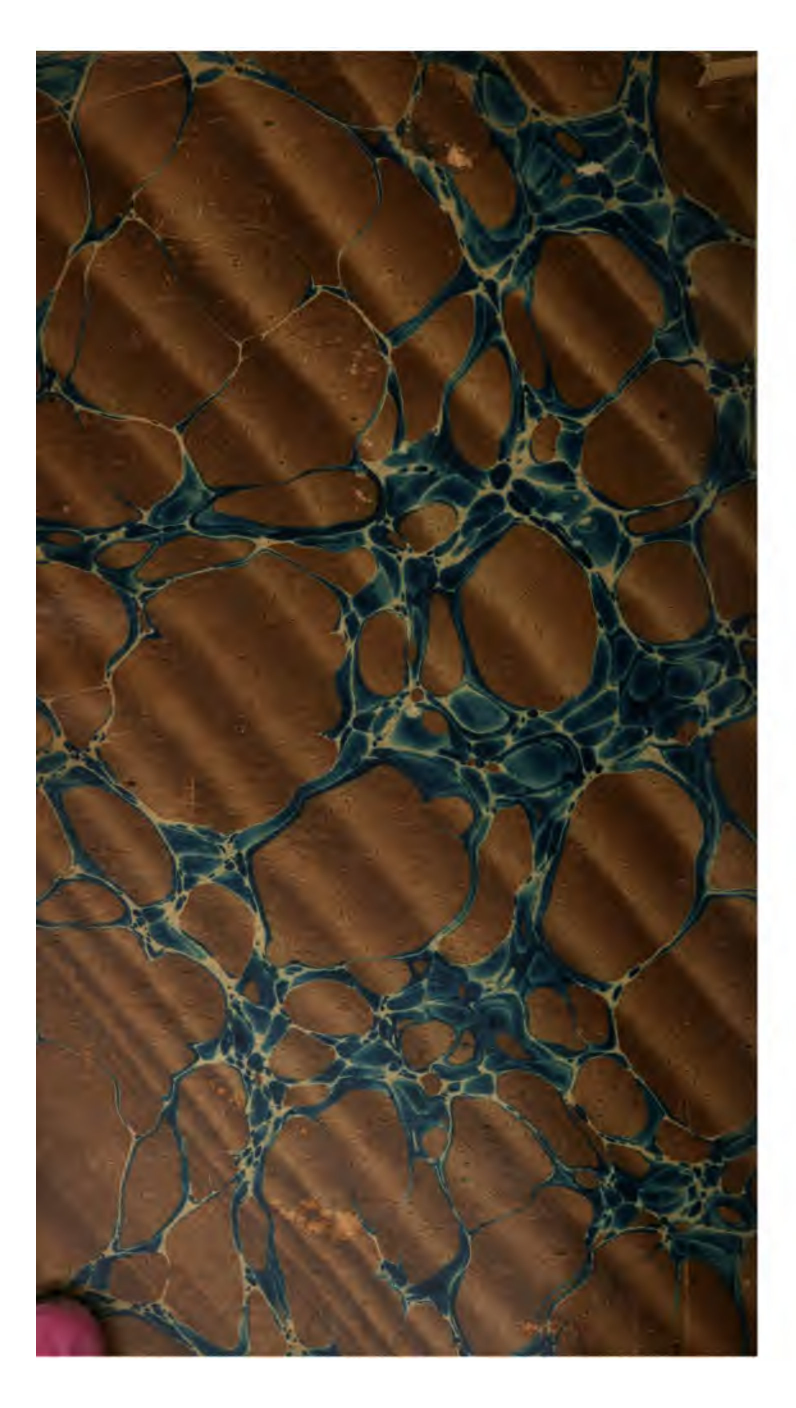
En 1894, l'École normale fêtait le centenaire de sa création. Un géomètre étranger, Sophus Lie, écrivit pour le Livre qui devait commémorer cette fête une étude scientifique sur Évariste Galois, qui restera un des plus beaux monuments élevés à sa gloire. A cette même occasion, M. Paul Dupuy, aujourd'hui secrétaire de l'École normale, commença de longues et patientes recherches sur la vie de Galois. Il a feuilleté les journaux du temps, compulsé les registres d'écrou des prisons ; les parents et les amis de Galois qui survivaient lui ont apporté tout leur concours ; ces recherches ont abouti à une biographie qu'on peut regarder comme définitive, et où M. Dupuy, à force de faire comprendre Galois, réussit presque à le faire aimer.

Je dois à la situation que j'occupe à l'École normale l'honneur de prendre la parole ici ; je vous remercie, Monsieur le Maire, de me permettre de faire au génie de Galois amende honorable au nom de cette École où il est entré à regret, où il n'a pas été compris, qui l'a rejeté loin d'elle et dont il est, malgré tout, une des gloires les plus éclatantes.



TABLE DES MATIÈRES

ÉVREUX, IMPRIMERIE CH. HÉRISSEY, PAUL HÉRISSEY, SUCC^r




3 2044 058 217 522


WIDENER
SEP 1 0 2005
BOOK DUE
JUN 2 5 2007
CANCELLED

